МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ: ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие
для студентов 1 курса университетов

Под общей редакцией
академика РАН В.А. Ильина

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2012

УДК 378(075.8):517.2
ББК 22.161я73
С14

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова

Под общей редакцией академика РАН *Ильина В.А*

Рецензенты:
доцент факультета ВМК МГУ к.ф.-м.н. *Тихомиров В.В.*,
профессор факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н. *Фомичёв В.В.*

Садовничая И.В., Фоменко Т.Н.

С14 **Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: теория и задачи:** Учеб. пособие для студентов 1 курса университетов. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2012. – 80 с.
ISBN 978-5-89407-471-9
ISBN 978-5-317-04160-1

Издание посвящено теоретическим и практическим аспектам темы «Предел и непрерывность функции одной переменной», изучаемой в первом семестре в рамках программы курса математического анализа. Оно основано на опыте чтения авторами лекций и ведения практических занятий на факультете ВМК МГУ.

Данное пособие является продолжением учебного пособия И.В. Садовничей, Т.Н. Фоменко и Е.В. Хорошиловой «Вещественные числа и последовательности. Теория и задачи» и содержит разделы, посвященные понятию функции одной переменной, понятию предела функции, непрерывности в точке и на множестве и их применению в различных задачах анализа. Для лучшего усвоения материала приводится ряд иллюстраций, а также набор задач по рассматриваемой теме, часть из которых излагается с полным решением, а часть дается для самостоятельной работы студентов.

Цель пособия – помочь студенту в изучении теоретической части и приобретении практических навыков решения задач по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной».

Для студентов университетов. Издание может быть полезно также преподавателям, читающим лекции и ведущим практические занятия по математическому анализу и всем, кто желает самостоятельно изучить данную тему или более подробно с ней ознакомиться.

УДК 378(075.8):517.2
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-89407-471-9
ISBN 978-5-317-04160-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Уважаемые читатели!

Данное учебное пособие содержит материал по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной» в объёме программы курса математического анализа для студентов первого курса факультета ВМК, как специалистов, так и бакалавров. Предполагается, что читатель знаком с теорией вещественных чисел и последовательностей.

В пособии 3 главы. В каждой главе своя двойная нумерация определений, всех утверждений, а также задач, с указанием номера параграфа.

В первой и второй главах излагается теоретический материал по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной». Для лучшего восприятия материала мы поместили несколько рисунков, примеров и замечаний, разъясняющих те или иные понятия и утверждения.

В третьей главе помещены подборки задач по всем разделам первых двух глав. Наряду с вычислительными задачами, приводится ряд задач на доказательство. Мы полагаем, что их решение является одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала. При этом в каждом параграфе часть задач приводится с подробными решениями, а остальные даются для самостоятельной работы студентов. Все задачи снабжены ответами.

Список литературы в конце пособия содержит учебники и задачники, которые использовались при составлении данного пособия, а также некоторые источники для дальнейшего знакомства с изложенными в пособии темами.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса факультета ВМК МГУ, а также для первокурсников других университетов, изучающих математический анализ. Мы надеемся, что оно окажется полезным как студентам, так и преподавателям при изучении или преподавании данной темы.

И.В.САДОВНИЧАЯ, Т.Н.ФОМЕНКО.

Глава 1. Предел функции.

§1. Понятие предела функции.

Определение 1.1. *Если каждому элементу x из множества $X \subseteq \mathbb{R}$ ставится в соответствие по известному закону f некоторое (единственное) число $y \in \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X задана* ***функция*** *$y = f(x)$.*

Число x называется ***аргументом*** *или* ***(независимой) переменной****; множество $X = X_f$ —* ***областью определения*** *функции f; число $y = f(x)$ —* ***(частным) значением*** *функции в точке x; множество $Y = f(X) = \{f(x) | x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$ —* ***областью изменения*** *или* ***множеством значений*** *функции $f(x)$. Часто используются обозначения: $X = D_f$, $Y = E_f$.*

Графиком функции *$y = f(x)$ называется множество точек плоскости, абсциссы которых равны допустимым значениям аргумента x, а ординаты — соответствуюшим значениям функции y, то есть график функции f — это множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$.*

Иначе говоря, отождествляя функцию f с ее графиком Γ_f, можно понимать функцию как **отображение**, т.е. подмножество Γ_f произведения $X \times \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in X$ $\exists!(x, y) \in \Gamma_f \subseteq X \times \mathbb{R}$, где $y = f(x)$ (определение отображения см., например, в [4]).

Определение 1.2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Множество $U_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ будем называть* ***проколотой δ–окрестностью*** *точки a и обозначать $\mathring{U}_\delta(a)$.*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка X.

Определение 1.3 (предел функции по Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *или* ***предельным значением*** *функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, та-*

кой, что $\{x_n\}$ сходится к a при $n \to +\infty$, но $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.

Определение 1.4 (предел функции по Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *или* ***предельным значением*** *функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$.

Теорема 1.1. *Определения 1.3 и 1.4 эквивалентны.*

Доказательство. 1) Предположим, что выполнено определение предела по Коши. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\{x_n\}$ сходится к a, но $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда (в силу определения по Коши) существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, то найдется натуральный номер $N = N(\delta)$ такой, что $0 < |x_n - a| < \delta$, то есть $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ при всех $n \geqslant N$. Значит, для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Мы показали, что, если выполнено определение предела функции по Коши, то выполнено и определение по Гейне.

2) Предположим теперь, что определение по Коши не выполнено. Это означает, что существует такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta \in \mathbb{R}$ найдется точка $x = x_\delta \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$, для которой будет иметь место неравенство $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$. Обозначим $\delta_n = 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получим, что для любого натурального n существует точка $x_n \in X$ такая, что $0 < |x_n - a| < 1/n$, но

$|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ аргументов сходится к a, но соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции не сходится к b. Значит, число b не является пределом функции и в смысле определения по Гейне. □

Пример 1.1. *1) Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$, так как для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, будет выполнено: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.*

Выше определен предел функции как число $b \in \mathbb{R}$. Определим теперь понятие бесконечного предела.

Определение 1.5 (по Гейне). ***Предел*** *функции $y = f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$* ***равен*** *$\infty(+\infty$ или $-\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a при $n \to +\infty$, но $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции стремится к ∞ $(+\infty$ или $-\infty))$.* Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty(+\infty$ или $-\infty)$ или $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \infty(+\infty$ или $-\infty)$.

Определение 1.6 (по Коши). ***Предел*** *функции $y = f(x)$ в точке a* ***равен*** *∞ $(+\infty$ или $-\infty)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполнено: $|f(x)| > \varepsilon$ $(f(x) > \varepsilon$ или $f(x) < -\varepsilon)$.* Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty\,(+\infty$ или $-\infty)$ или $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \infty\,(+\infty$ или $-\infty)$.

Определения 1.5 и 1.6 эквивалентны. Доказательство этого полностью аналогично доказательству теоремы 1.1.

Введем понятие правого (левого) предела функции. Потребуем, чтобы для любого $\delta > 0$ множество $(a, a + \delta) \cap X$ $((a - \delta, a) \cap X)$ содержало хотя бы один элемент.

Определение 1.7 (по Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty, +\infty, -\infty$, называется* ***правым (левым) преде-***

лом *функции $y = f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a и $x_n > a$ $(x_n < a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b или, соответственно, к $\infty, +\infty, -\infty$.*

Определение 1.8 (по Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ (или $b = \infty, +\infty, -\infty$) называется* ***правым (левым) пределом*** *функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $(a, a+\delta) \cap X$ $((a-\delta, a) \cap X)$ выполняется $|f(x) - b| < \varepsilon$ (или $|f(x)| > \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$).*

Обозначения: $f(a \pm 0) = \lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = b$ или $f(x) \underset{x \to a \pm 0}{\longrightarrow} b$.

Определения 1.7 и 1.8 эквивалентны.

Из определений предела по Коши сразу следует

Утверждение 1.1. *Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Теперь введем понятие предела функции при $x \to a$ в случае, когда a является не числом, а символической бесконечно удаленной точкой (то есть одной из точек $\infty, +\infty, -\infty$). Напомним, что δ–окрестности таких точек определяются как множества $U_\delta(\infty) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$, $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$, $U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta)$, $\delta > 0$. Очевидно, что в этом случае проколотые окрестности совпадают с обычными, то есть: $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty) = U_\delta(\infty)$, $\overset{\circ}{U}_\delta(+\infty) = U_\delta(+\infty)$, $\overset{\circ}{U}_\delta(-\infty) = U_\delta(-\infty)$. Дадим определение предела в случае бесконечной точки a.

Определение 1.9 (по Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty(+\infty, -\infty)$ называется* ***пределом*** *функции $y = f(x)$* ***при*** *$x \to \infty, (x \to +\infty, x \to -\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что*

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \infty$ $(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty)$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b или к $\infty(+\infty, -\infty)$.

Определение 1.10 (по Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty, +\infty, -\infty$ называется* ***пределом*** *функции $y = f(x)$* ***при*** *$x \to \infty$, $(x \to +\infty, x \to -\infty)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $A = A(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in X$, для которого $|x| > A$ $(x > A, x < -A)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $|f(x)| > \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$.*

Обозначения: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ $(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b)$ или $f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} b$ $(f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b$, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} b)$.

Определения 1.9 и 1.10 эквивалентны.

Объединяя все вышесказанное, можно дать общее определение предела функции в точке (конечной или бесконечной) в терминах окрестностей:

Определение 1.11. *Пусть каждая из точек a, b принадлежит вещественной прямой или является бесконечно удаленной точкой. Говорят, что* ***предел*** *функции $f(x)$ при x, стремящемся к a,* ***равен*** *b, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполнено: $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ (здесь X — область определения функции $f(x)$, a — предельная точка X).*

Пусть теперь $b \in \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X (конечная или бесконечная). Иногда бывает полезно использовать следующие определения:

Определение 1.12 (по Гейне). *Если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b и при этом $f(x_n) > b$ $(f(x_n) < b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то пишут:*

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b + 0$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = b - 0$).

Определение 1.13 (по Коши). *Говорят, что* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b + 0$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = b - 0$), *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ *выполняются неравенства* $0 < f(x) - b < \varepsilon$ ($0 < b - f(x) < \varepsilon$).

Определения 1.12 и 1.13 эквивалентны. Доказательство этого факта аналогично общему случаю.

Определение 1.14. *Функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет в точке* a ***условию Коши****, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых точек* $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ *имеет место неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 1.2 (критерий Коши существования предела функции в точке). *Функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* a *конечный предел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет в этой точке условию Коши.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ будет выполнено неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon/2$. Пусть $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$. Тогда $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leqslant \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, то есть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a.

Достаточность. Проведем доказательство для случая $a \in \mathbb{R}$ (случай бесконечно удаленной точки a рассматривается аналогично). Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a. Выберем последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда найдется такой номер $N = N(\delta)$, что для любого натурального $n \geqslant N$ и любого натурального p будут выполняться неравенства: $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$. В силу условия Коши имеем: $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $p \in \mathbb{N}$. Но это означает, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной. Следовательно, она сходится.

Итак, мы показали, что для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции имеет предел. Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ — две различные последовательности аргументов $f(x)$, удовлетворяющие условиям: $\lim\limits_{n \to +\infty} x'_n = a$, $x'_n \neq a$; $\lim\limits_{n \to +\infty} x''_n = a$, $x''_n \neq a$. Тогда существует $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x'_n) = b'$ и существует $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x''_n) = b''$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots\}$. Очевидно, что она стремится к a при $n \to +\infty$, и при этом $x_n \neq a$. Значит, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Обозначим $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$. Так как последовательности $\{f(x'_n)\}$, $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(x_n)\}$, то они должны сходиться к тому же самому пределу. Значит, $b' = b'' = b$. Мы показали, что предел последовательности значений функции не зависит от выбора соответствующей последовательности ее аргументов. Это означает, что функция $f(x)$ имеет предел в точке a. □

Теорема 1.3. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *заданы на множестве* X, a — *предельная точка множества* X *(конечная или бесконечная),* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ *(*b, c *— конечные числа).*

Тогда $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ *(в случае, если* $c \neq 0$*).*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = c$. Значит (по теореме об арифметических операциях над сходящимися последовательностями), $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = b \pm c$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = b \cdot c$. Если $c \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $g(x_n) \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$. Но это означает, в силу определения предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (при $c \neq 0$). $\square$

Определение 1.15. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ задана на множестве T; X — множество ее значений. Если на множестве X задана функция $y = f(x)$, то говорят, что на T определена* ***сложная функция*** *$y = f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t)$ (функцию $f \circ \varphi$ называют также* ***композицией*** *функций f и φ).*

Замечание 1.1. Можно было бы ожидать, что справедливо следующее утверждение: если $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, то $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = l$. Такое утверждение справедливо, например, для непрерывных функций (см. теорему 1.2 главы 2). Однако в общем случае подобная теорема неверна.

Пример 1.2. *Пусть $f(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$; $\varphi(t) \equiv 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(\varphi(t)) = 1$.*

Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что

для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0)$ выполнено: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Далее, существует $\delta = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что $|\varphi(t) - x_0| < \delta_1$ при всех $t \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(t_0)$. Но тогда получаем, что $\forall t \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(t_0)$ справедливо неравенство $|f(\varphi(t)) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$. $\square$

Теорема 1.5. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве X, a — предельная точка X, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Если существует такое число $\delta > 0$, что при всех x из множества $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то оно сохраняется и в пределе: $b \geqslant c$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда найдется такое натуральное число $N = N(\delta)$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap X$. Значит, $f(x_n) \geqslant g(x_n)$ $\forall n \geqslant N$, следовательно, $b = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = c$ (по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей). $\square$

Замечание 1.2. Если $f(x) > g(x)$, то в пределе возможно равенство: $b = c$. Например, пусть $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/(x+1)$. Тогда $f(x) > g(x)$ при $x > 0$, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Теорема 1.6. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на множестве X, a — предельная точка X, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Если существует такое число $\delta > 0$, что при всех x из множества $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap X$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. То-где $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = b$ и найдется такое натуральное $N = N(\delta)$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$. Значит, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве для последовательностей, последовательность $\{h(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) = b$. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. $\square$

Определение 1.16. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, $A \subseteq X$. Функция $f(x)$* ***ограничена сверху (снизу)*** *на множестве A, если существует постоянная $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) такая, что $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) при всех $x \in A$. Числа M и m называются соответственно* ***верхней и нижней гранями*** *функции $f(x)$ на множестве A. Если функция $f(x)$ ограничена на множестве A и сверху, и снизу, то она называется* ***ограниченной*** *на множестве A.*

Теорема 1.7. *Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $f(x)$ ограничена на множестве $U_\delta(a) \cap X$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполнено: $|f(x) - b| < 1$, что равносильно $b - 1 < f(x) < b + 1$. Если точка a не принадлежит множеству X, то получаем, что при всех x из $U_\delta(a) \cap X$ имеет место двойное неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, где $m = b - 1$, $M = b + 1$. Если же точка a принадлежит множеству X, то при всех x из $U_\delta(a) \cap X$ будет иметь место неравенство $m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1$, где $m_1 = \min\{f(a), b - 1\}$, $M_1 = \max\{f(a), b + 1\}$. И в том, и в другом случае $f(x)$ ограничена на множестве $U_\delta(a) \cap X$. $\square$

§2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Асимптотическое сравнение функций.

Иногда требуется исследовать поведение функции $f(x)$ в проколотой окрестности заданной точки (конечной или бесконечной). Такое поведение называют **асимптотическим**. Для исследования асимптотического поведения данной функции проводят сравнение ее с асимптотическим поведением (в той же окрестности) другой, более простой или лучше изученной функции. Подобное асимптотическое сравнение мы будем рассматривать ниже. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что точка a либо конечная (то есть $a \in \mathbb{R}$), либо бесконечная (то есть $a = \infty, a = -\infty, a = +\infty$).

Определение 2.1. *Функция $\alpha(x)$ называется* ***бесконечно малой*** *в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

Обозначение: $\alpha(x) = \bar{o}(1)$, $x \to a$. Читается: функция $\alpha(x)$ есть о-малое от единицы при x, стремящемся к a.

Асимптотическое сравнение функций.

Определение 2.2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$ и пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$ при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, где $\alpha(x)$ — некоторая функция. Тогда*

1) Если $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$, то говорят, что $f(x) = \bar{o}(g(x))$ ($f(x)$ есть ***о-малое*** *от $g(x)$) при $x \to a$;*

2) Если $\alpha(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то говорят, что $f(x) = \underline{O}(g(x))$ ($f(x)$ есть ***о-большое*** *от $g(x)$) при $x \to a$.*

В частности, если сама функция $f(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то говорят, что $f(x) = \underline{O}(1)$ ($f(x)$ есть о-большое от единицы) при $x \to a$;

3) Если существует $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = k \neq 0$, то говорят, что $f(x) = \underline{O}^*(g(x))$ ($f(x)$ есть ***о-большое со звездочкой***

от $g(x)$) при $x \to a$;
4) Если существует $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***эквивалентными*** *в точке a. Пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$.*

Если $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то можно переформулировать предыдущее определение, полагая $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Определение 2.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$. Тогда*
1) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = \bar{o}(g(x))$ при $x \to a$;
2) Если функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничена при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то говорят, что $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \to a$. В частности, если $g(x) = 1$, то есть если сама функция $f(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то говорят, что $f(x) = \underline{O}(1)$ при $x \to a$;
3) Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то $f(x) = \underline{O}^*(g(x))$ при $x \to a$;
4) Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$.

Следующее утверждение читатели легко докажут самостоятельно.

Утверждение 2.1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда 1) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ в том и только в том случае, когда $f(x) - g(x) = \bar{o}(g(x)) = \bar{o}(f(x))$ при $x \to a$.*
2) Если $f(x) = \underline{O}^*(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \to a$.

Замечание 2.1. Аналогично определяется сравнение функций в точке a справа (слева). Для этого во всех пунктах 1)-4) определений 2.2 и 2.3 достаточно заменить символ $\lim\limits_{x\to a}$ на символ $\lim\limits_{x\to a+0}$ (или соответственно на $\lim\limits_{x\to a-0}$).

Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ определены в проколотой окрестности точки a; $\alpha(x) = \bar{o}(1)$; $\beta(x) = \bar{o}(1)$, $x \to a$.

Определение 2.4. *Если $\alpha(x) = \bar{o}(\beta(x))$ при $x \to a$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ является в точке a* ***бесконечно малой более высокого порядка****, чем $\beta(x)$.*

Определение 2.5. *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке a* ***бесконечно малыми одного порядка****, если существуют $C_1 > 0$, $C_2 > 0$: $C_1|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)| \leqslant C_2|\alpha(x)|$ при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. В частности, это верно, если существует такая функция $\gamma(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$, и постоянная $C \neq 0$, что $\alpha(x) = \beta(x)(C + \gamma(x))$ при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то есть $\alpha(x) = O^*(\beta(x))$. Если $\beta(x) \neq 0$ при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то получаем, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$.*

Определение 2.6. *Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются* ***эквивалентными*** *в точке a, если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$.*

Определение 2.7. *Функция $A(x)$ называется* ***бесконечно большой в точке*** *a, если $\lim\limits_{x\to a} A(x) = \infty$.*

Пусть функции $A(x)$, $B(x)$ определены в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ $(\delta > 0)$ и являются бесконечно большими в точке a.

Определение 2.8. *Функция $A(x)$ имеет в точке a* ***более высокий порядок роста****, чем функция $B(x)$, если функция $\frac{A(x)}{B(x)}$ является бесконечно большой в точке a.*

Определение 2.9. *Функции $A(x)$ и $B(x)$ имеют в точке a* ***одинаковый порядок роста****, если существуют $C_1 > 0$, $C_2 > 0$: $C_1|A(x)| \leqslant |B(x)| \leqslant C_2|A(x)|$, $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. В частности, это верно , если $\lim\limits_{x\to a}\frac{A(x)}{B(x)} = C \neq 0$.*

Замечание 2.2. Аналогично определяют и сравнивают бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке

a справа (слева). Для этого достаточно в определениях 2.4 — 2.9 вместо $x \to a$ всюду написать $x \to a+0$ ($x \to a-0$) и вместо фразы «в точке a» — «в точке a справа (слева)».

Определение 2.10. *Говорят, что функция $g(x)$ является* ***главной частью (главным членом)*** *функции $f(x)$ при $x \to a$, если для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, $\delta > 0$, выполнено: $f(x) = g(x)(1+\alpha(x))$, где $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$ (другими словами, если $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$).*

Обычно рассматривают задачу об отыскании главного члена $f(x)$ в заданном виде (например, в виде Cx^α, C/x^α, где $C \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, и т.п.).

Рассмотрим свойства бесконечно малых функций.

Теорема 2.1. *Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ определены на множестве X, a — предельная точка X; при этом пусть $\alpha(x) = \bar{o}(1)$, $\beta(x) = \bar{o}(1)$, $\gamma(x) = \underline{O}(1)$, $x \to a$. Тогда $(\alpha(x) \pm \beta(x)) = \bar{o}(1)$, $(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \bar{o}(1)$, $(\alpha(x) \cdot \gamma(x)) = \bar{o}(1)$, $x \to a$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\{\alpha(x_n)\}$, $\{\beta(x_n)\}$ — бесконечно малые последовательности, $\{\gamma(x_n)\}$ — ограниченная. Значит, последовательности $\{\alpha(x_n) \pm \beta(x_n)\}$, $\{\alpha(x_n) \cdot \beta(x_n)\}$, $\{\alpha(x_n) \cdot \gamma(x_n)\}$ — также бесконечно малые. Отсюда и из определения предела функции по Гейне следует утверждение теоремы. □

Доказательство следующей теоремы предоставляем читателю в качестве несложного упражнения.

Теорема 2.2. *Пусть a — предельная точка множества X. Тогда 1) если функция $A(x)$ определена на X и является бесконечно большой при $x \to a$, то функция $\alpha(x) = 1/A(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$. 2) Если функция $\alpha(x)$ определена на X и является бесконечно малой в точке a, причем $\alpha(x) \neq 0$ при $x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то функция $A(x) = 1/\alpha(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$.*

Глава 2. Непрерывность функции.

§1. Понятие непрерывности. Локальные свойства непрерывных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, $a \in X$, a — предельная точка X.

Определение 1.1 (формальное). *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной*** *в точке a, если ее предел в точке a существует и совпадает с ее частным значением в этой точке, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Определение 1.2 (по Гейне). *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной*** *в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(a)$.*

Определение 1.3 (по Коши). *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной*** *в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек x из множества $B_\delta(a) \cap X$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Очевидно, что определения 1.1–1.3 эквивалентны (это сразу следует из эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне).

Замечание 1.1. Заметим, что, в отличие от определения 1.1, определения 1.2 и 1.3 остаются в силе и тогда, когда точка a принадлежит X, но не является предельной для X. Согласно им, функция всегда является непрерывной в точке $a \in X$, если a — изолированная точка множества X, то есть существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) \cap X = \emptyset$ (X — область определения функции). Тем не менее, чаще всего понятие непрерывности рассматривается в случае, когда a — предельная точка множества X.

Определение 1.4. *Пусть a — предельная точка множества $X \cap (a, +\infty)$ (или $X \cap (-\infty, a)$). Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке a **справа (слева)**, если существует $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$)*

Утверждение 1.1. *Если a является предельной точкой каждого из (непустых) множеств $(-\infty, a] \cap X$, $X \cap [a, +\infty)$, где X — область определения $f(x)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в точке a и справа, и слева.*

Доказательство сразу следует из определения непрерывности функции.

Определение 1.5. *Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, a — предельная точка X. Предположим также, что либо $a \in X$, либо точка a является предельной как для множества $X \cap (-\infty, a)$, так и для множества $X \cap (a, +\infty)$. В этих предположениях точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a.*

Определение 1.6. *Функция $y = f(x)$ **непрерывна на множестве** $M \subseteq X$, если она непрерывна в каждой точке $x \in M$.*

Если не все точки множества M входят в него с некоторой окрестностью, то это определение немного меняется, например:

Определение 1.7. *Функция $y = f(x)$ **непрерывна на сегменте** $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна в точке a справа и в точке b слева.*

Теорема 1.1. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве X и непрерывны в точке $a \in X$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке a и, если $g(a) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Так как по условию $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, то получаем, что $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a)$, $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$ и, в случае $g(a) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$. Далее воспользуемся формальным определением непрерывности функции. □

Классификация точек разрыва.

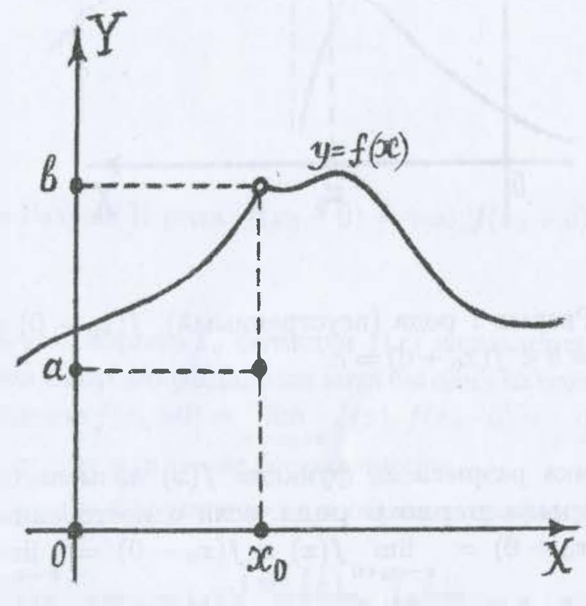

Рис. 1: Устранимый разрыв. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = b \neq \neq f(x_0) = a$.

1) Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется **точкой устранимого разрыва**, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и ко-

нечен, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, или значение $f(x_0)$ не определено.

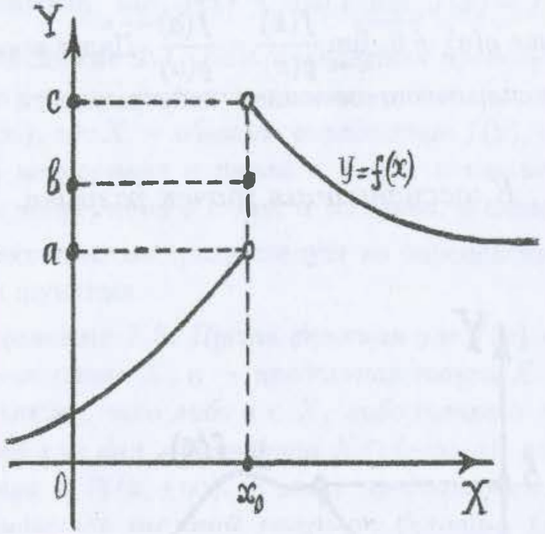

Рис. 2: Разрыв I рода (неустранимый). $f(x_0 - 0) = a < f(x_0) = b < f(x_0 + 0) = c$.

2) Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется **точкой разрыва первого рода**, если односторонние пределы $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ существуют и конечны, но $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

Замечание 1.2. Часто в литературе выделяют только два основных типа точек разрыва — **первого рода** (существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$) и **второго рода** (все остальные); при этом разрывы первого рода делятся на **устранимые** и **неустранимые (скачки)**. По этому поводу, см., например, [4], [5].

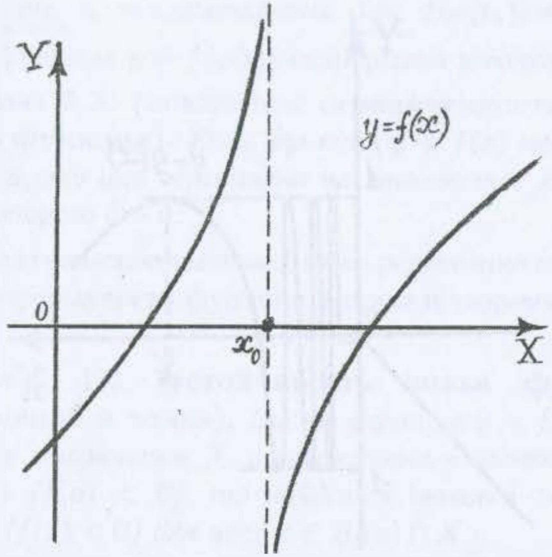

Рис. 3: Разрыв II рода. $f(x_0 - 0) = +\infty$; $f(x_0 + 0) = -\infty$.

3) Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется **точкой разрыва второго рода**, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не существует или равен бесконечности.

На рисунке 4 схематически изображен график функции

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ x, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Для нее $\lim\limits_{x \to 0-0} g(x) = g(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+0} g(x)$ не существует.

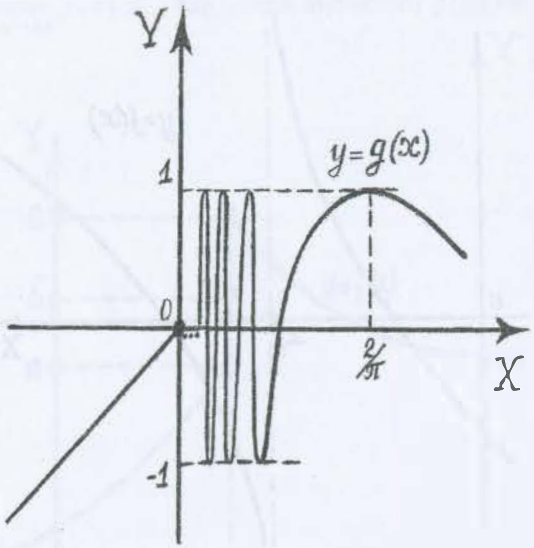

Рис. 4: Разрыв II рода. $g(-0) = g(0) = 0; g(+0)$ — не существует.

Локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 1.2 (непрерывность сложной функции). *Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, то сложная функция*[1] *$y = f(\varphi(t))$ также непрерывна в точке a .*

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ — последовательность точек множества T, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = a$. Так как функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a, то $x_n = \varphi(t_n) \to \varphi(a) = b$ при $n \to +\infty$. Но функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(b)$. Мы получили, что для любой последовательности $\{t_n\}$ аргументов, для

[1] понятие сложной функции введено в главе 1, определение 1.15

которой $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = a$, выполнено: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varphi(t_n)) = f(\varphi(a))$. Значит, функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке a. $\square$

Теорема 1.3. (локальная ограниченность непрерывной функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, то она ограничена на множестве $B_\delta(a) \cap X$ для некоторого $\delta > 0$.*

Доказательство вытекает непосредственно из определения непрерывности функции в точке и теоремы 2.4 главы 1.

Теорема 1.4 (устойчивость знака функции, непрерывной в точке). *Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и непрерывна в точке a. Если $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, то найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap X$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна в точке a, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in B_\delta(a) \cap X$ выполнено: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, что равносильно $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = |f(a)|/2 > 0$. Тогда

$$f(a) - |f(a)|/2 < f(x) < f(a) + |f(a)|/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2}, \ f(a) > 0, \\ \dfrac{3f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{f(a)}{2} < 0, \ f(a) < 0 \end{cases} \qquad x \in B_\delta(a) \cap X. \square$$

§2. Глобальные свойства непрерывных функций.

Обозначим через $C[a, b]$ класс функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$ и изучим некоторые свойства функций из этого класса.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.*

"таких что "

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Пусть $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$. Заметим, что множество A не пусто (так как $a \in A$) и ограничено сверху (например, числом b). Значит, существует $\sup A = c$. Покажем, что $f(c) = 0$. Предположим, что $f(c) > 0$. Тогда $c \neq a$ и (по теореме о сохранении знака) найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) > 0$ при всех $x \in (c-\delta, c]$. Следовательно, точка c не является точной верхней гранью множества A. Мы пришли к противоречию, значит, наше предположение неверно и $f(c) \leqslant 0$. Если $f(c) < 0$, то $c \neq b$ и найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) < 0$ при всех $x \in [c, c+\delta)$. Но это означало бы, что c не является верхней гранью множества A. Получаем, что $f(c) = 0$. □

Следствие (о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения). Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда для любого числа γ, лежащего между значениями $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка c из сегмента $[a,b]$, что $f(c) = \gamma$.

Доказательство. Обозначим $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$, $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$. Пусть $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Если $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$, то утверждение очевидно. Пусть $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Она удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы. Значит, существует такая точка $c \in [a,b]$, что $g(c) = 0$, то есть $f(c) = \gamma$. □

Теорема 2.2 (первая теорема Вейерштрасса). *Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a,b]$, ограничена на этом сегменте.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$ сверху. Тогда для любого натурального n найдется такая точка x_n из сегмента $[a,b]$, что $f(x_n) > n$. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_n\}$. Она ограничена (поскольку $a \leqslant x_n \leqslant b$ при всех $n \in \mathbb{N}$), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Обозначим $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}$. Так как $x_{k_n} \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\xi \in [a,b]$. Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, следовательно, она непрерывна и в точке ξ. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(\xi)$ (определение непрерывности функции по Гейне). Но по построению последовательности $\{x_n\}$ имеем: $f(x_{k_n}) > k_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то есть $f(x_{k_n}) \to +\infty$. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и функция $f(x)$ ограничена сверху. Ограниченность снизу проверяется аналогично. □

Замечание 2.1. В случае интервала или полуинтервала утверждение теоремы, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $(0,1)$ и на полуинтервале $(0,1]$, но не ограничена на этих промежутках.

Определение 2.1. *Число $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) называется **точной верхней (нижней) гранью** функции $f(x)$ на множестве A, если выполнены условия:*
1) $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) при всех $x \in A$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $x' \in A$, что $f(x') > M - \varepsilon$ ($f(x') < m + \varepsilon$).

Обозначения: $M = \sup\limits_{x\in A} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in A} f(x)$.

Теорема 2.3 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда она достигает на этом сегменте своих точной верхней и точной нижней граней.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, согласно первой теореме Вейерштрасса, она ограничена на этом сегменте. Значит, существуют числа $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ и $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Предположим, что $f(x) < M$ при всех $x \in [a,b]$. Введем функцию $g(x) = 1/(M - f(x))$. Функция $g(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ (как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель не обращается в

0), следовательно, ограничена на нем. Значит, существует число $A > 0$ такое, что $1/(M - f(x)) \leqslant A$ при всех $x \in [a, b]$, что равносильно $M - f(x) \geqslant 1/A$ или $f(x) \leqslant M - 1/A$ $\forall x \in [a, b]$. Но последнее неравенство означает, что число M не является точной верхней гранью функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) = M$. Аналогичные рассуждения можно провести и для точной нижней грани. $\square$

§3. Монотонные функции.

Определение 3.1. *Функция $y = f(x)$ называется* ***неубывающей (невозрастающей)*** *на множестве A, если при всех $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.*

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** *на множестве A, если при всех $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.*

Если функция $f(x)$ является неубывающей или невозрастающей, то она называется ***монотонной***. *Если $f(x)$ является возрастающей или убывающей, то она называется* ***строго монотонной***.

Определение 3.2. *Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X и имеет множество значений Y. Если для любого элемента y из множества Y существует единственный соответствующий элемент $x \in X$ (то есть отображение $f : X \to Y$ является взаимно однозначным), то говорят, что на множестве Y задана* ***обратная функция*** *$x = f^{-1}(y)$, которая каждому $y \in Y$ ставит в соответствие элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. При этом $f^{-1}(f(x)) \equiv x$, $f(f^{-1}(y)) \equiv y$, где $x \in X$, $y \in Y$.*

Пример 3.1. *1) Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$. Тогда $y = f(x) \in [0, 4]$, $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.*

2) Пусть $y = f(x) = \begin{cases} x, & x - \textit{рациональное}, \\ 1 - x, & x - \textit{иррациональное}; \end{cases}$

$x \in X = [0, 1]$. *Тогда*

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y - \textit{рациональное}, \\ 1 - y, & y - \textit{иррациональное}; \end{cases} \qquad y \in Y = [0, 1].$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, $c \in [a, b]$. Введем следующие обозначения:

$$F_c^+ = \{f(x) \mid c < x \leqslant b\} \ (c \neq b);$$

$$F_c^- = \{f(x) \mid a \leqslant x < c\} \ (c \neq a).$$

Теорема 3.1 (о точках разрыва монотонной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на сегменте $[a, b]$. Тогда 1) она может иметь на $[a, b]$ только разрывы первого рода; 2) множество точек разрыва $f(x)$ на $[a, b]$ не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает (случай невозрастающей $f(x)$ рассматривается аналогично).

1) Пусть $c \in [a, b)$. Заметим, что, поскольку $F_c^+ \neq \emptyset$ $(f(b) \in F_c^+)$ и F_c^+ ограничено снизу (например, числом $f(c)$), то существует $\inf F_c^+ = l_1$. Тогда, по определению точной нижней грани, имеем: $f(x) \geqslant l_1$ $\forall x > c$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая точка $x' > c$, что $f(x') < l_1 + \varepsilon$. Так как $f(x)$ не убывает, то отсюда следует, что $l_1 \leqslant f(x) < l_1 + \varepsilon$ при всех $x \in (c, x']$. Это означает, что $l_1 = f(c + 0)$. Поскольку число $f(c)$ является одной из нижних граней множества F_c^+, то $f(c) \leqslant l_1 = \inf F_c^+$. Аналогично доказывается, что при $c \in (a, b]$: $f(c - 0) = l_2$, $f(c) \geqslant l_2$, где $l_2 = \sup F_c^-$.

Значит, односторонние пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ существуют и конечны, причем $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$ (здесь и далее в этом параграфе считаем, что $f(a - 0) = f(a)$, $f(b+0) = f(b)$). Отсюда следует, что c — либо точка непрерывности функции $f(x)$, либо точка разрыва первого рода. ?

2) Пусть c — точка разрыва функции $f(x)$. Тогда, по доказанному в пункте 1, $f(c-0) < f(c+0)$. Значит, найдется такое рациональное число r_c, что $f(c-0) < r_c < f(c+0)$. Пусть c_1, c_2 — две различные точки разрыва $f(x)$, $c_1 < c_2$. Тогда $f(c_1+0) \leqslant f(c_2-0)$ (действительно, $f(c_1+0) = \inf F_c^+ = \inf\{f(x)\,|\,c_1 < x < c_2\}$; $f(c_2-0) = \sup F_c^- = \sup\{f(x)\,|\,c_1 < x < c_2\}$). Значит, $r_{c_1} < r_{c_2}$, то есть разным точкам разрыва функции $f(x)$ соответствуют различные рациональные числа.

Мы показали, таким образом, что множество точек разрыва функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ эквивалентно некоторому подмножеству множества рациональных чисел. Это означает, что оно является пустым, конечным или счетным. □

Замечание 3.1. Отметим, что непосредственно из доказательства теоремы 3.1 вытекают соотношения:

$$f(c+0) = \inf F_c^+ = l_1,\ a \leqslant c < b,$$

$$f(c-0) = \sup F_c^- = l_2,\ a < c \leqslant b,$$

где $l_2 \leqslant f(c) \leqslant l_1$, если $f(x)$ не убывает на $[a,b]$;

$$f(c+0) = \sup F_c^+ = l_1,\ a \leqslant c < b,$$

$$f(c-0) = \inf F_c^- = l_2,\ a < c \leqslant b,$$

где $l_1 \leqslant f(c) \leqslant l_2$, если $f(x)$ не возрастает $[a,b]$.

В двух следующих теоремах обозначим для удобства изложения $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$, $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.

Теорема 3.2 (критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена и монотонна на сегменте $[a,b]$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ в том и только в том случае, когда $\forall l \in [\alpha,\beta]$ найдется такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = l$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $f(x)$ не убывает на $[a,b]$.

Необходимость уже доказана, причем даже без предположения о монотонности функции $f(x)$ (см. следствие из теоремы 2.1 настоящей главы).

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $c \in [a,b]$. Тогда $l_2 = f(c-0) < f(c+0) = l_1$ и $l_2 \leqslant f(c) \leqslant l_1$ (если $c = a$, то $l_2 = f(a)$; если $c = b$, то $l_1 = f(b)$). Предположим, что число $l \in (l_2, l_1)$ и $l \neq f(c)$. Тогда при всех $x < c$ имеем: $f(x) \leqslant l_2 < l$ (так как $l_2 = \sup F_c^-$) и при всех $x > c$ имеем: $f(x) \geqslant l_1 > l$ (так как $l_1 = \inf F_c^+$). Но это означает, что функция $f(x)$ не принимает значение l из сегмента $[f(a), f(b)]$, что противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $f(x)$ имеет разрыв в точке c, неверно. Получаем, что функция $f(x)$ непрерывна всюду на сегменте $[a,b]$. □

Теорема 3.3 (об обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда существует обратная функция $x = g(y) = f^{-1}(y)$, которая определена на сегменте $[\alpha,\beta]$, возрастает (убывает) и непрерывна на нем.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ (случай убывающей функции рассматривается аналогично).

1) Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, согласно критерию непрерывности монотонной функции, для любого значения $y \in [\alpha,\beta]$ найдется точка $x \in [a,b]$ такая, что $f(x) = y$. При этом, если $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$ (поскольку $f(x)$ строго монотонна). Значит, для любой точки $y \in [\alpha,\beta]$ существует единственное значение $x \in [a,b]$ такое, что $f(x) = y$. Это означает, что на сегменте $[\alpha,\beta]$ определена обратная функция $x = g(y)$.

2) Пусть $y_1, y_2 \in [\alpha,\beta]$, $y_1 < y_2$. Если предположить, что $x_1 = g(y_1) \geqslant g(y_2) = x_2$, то получим, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (так как функция $f(x)$ возрастает). Но это означает, что $y_1 \geqslant y_2$, что неверно. Мы получили, что из неравенства

$y_1 < y_2$ следует неравенство $g(y_1) < g(y_2)$, то есть функция $x = g(y)$ также возрастает.

3) Заметим, что возрастающая функция $x = g(y)$ принимает все значения из сегмента $[a, b]$ (так как функция $y = f(x)$ определена всюду на этом сегменте). Отсюда следует, в силу критерия непрерывности монотонной функции, что функция $x = g(y)$ является непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$. $\square$

§4. Основные элементарные функции.

В этом разделе мы рассмотрим основные элементарные функции и их свойства. Прежде всего, опишем простейшие элементарные функции — те, с помощью которых строятся все остальные элементарные функции.

Определение 4.1. *Функции: 1 (постоянная), a^x, $\log_a x$, x^α, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называются **простейшими элементарными функциями**.*

Определение 4.2. *Функции, которые могут быть получены из простейших элементарных функций путем применения арифметических операций и операции композиции в конечном числе, называются **элементарными**.*

Ниже мы покажем, что каждая из простейших элементарных функций является непрерывной на области своего определения. Отсюда, из теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями и теоремы о непрерывности сложной функции сразу будет следовать

Теорема 4.1. *Любая элементарная функция непрерывна на области своего определения.* $\square$

Напомним еще о двух понятиях, известных из школьной программы.

Определение 4.3. *Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если из того, что существует $f(x)$, следует, что существует и $f(-x)$ и $f(-x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если из того, что существует $f(x)$, следует, что существует и $f(-x)$ и $f(-x) = -f(x)$.*

Определение 4.4. *Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое вещественное число $T \neq 0$, что для любой точки $x \in X$, $x - T, x + T \in X$, где X — область определения $f(x)$, и $\forall x \in X$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется **периодом** функции $f(x)$. Числа $\pm nT$, $n \in \mathbb{N}$, также называются ее периодами. Если существует число $T_0 > 0$ такое, что оно является периодом функции $f(x)$, и при этом все остальные периоды кратны T_0, то T_0 называют **основным** или **наименьшим положительным периодом** функции $f(x)$ (часто основной период называют просто **периодом**).*

Пример 4.1. *1) Функция $f(x) \equiv C$ — постоянная. Очевидно, что любое $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — период $f(x)$. При этом наименьшего положительного периода не существует.*

2) Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное} \end{cases}$

Любое число $T \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ — период $D(x)$. Наименьшего положительного периода также не существует.

Замечание 4.1. Известно, что, если $f(x)$ — периодическая функция, отличная от постоянной, и при этом $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то для нее существует единственное число $T_0 > 0$, являющееся ее основным периодом.

Наша ближайшая цель — дать определение степени с рациональным показателем и изучить ее основные свойства. Пусть $m \in \mathbb{N}$.

1) Положим по определению $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ раз}}$. Функция $f(x) = x^m$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, так как

$$\lim_{x\to a} x^m = \underbrace{(\lim_{x\to a} x)\cdot\dots\cdot(\lim_{x\to a} x)}_{m \text{ раз}} = \underbrace{a\cdot\dots\cdot a}_{m \text{ раз}} = a^m,$$ и возрастает на $\mathbb{R}+$, поскольку при $0 \leqslant x_1 < x_2$ справедливо

$$x_2^m - x_1^m = (x_2 - x_1)(x_2^{m-1} + x_2^{m-2}\cdot x_1 + \dots + x_1^{m-1}) > 0.$$

2) По теореме об обратной функции [2] существует функция $g(x) = x^{1/m}$, которая также непрерывна и возрастает на $\mathbb{R}_+$.

3) Положим по определению $x^{-m} = \underbrace{1/x \cdot 1/x \cdot \dots \cdot 1/x}_{m \text{ раз}}$.

Функция $f(x) = x^{-m}$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$, так как $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x^m} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} x^m} = \dfrac{1}{a^m}$, и убывает на $(0, +\infty)$, поскольку при $0 < x_1 < x_2$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{x_1^m} - \dfrac{1}{x_2^m} = \dfrac{x_2^m - x_1^m}{x_1^m \cdot x_2^m} > 0$.

4) Пусть $x > 0$ — произвольное вещественное число, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $y = x^{1/m}$, $z = (x^n)^{1/m}$. Тогда $y^m = x \Rightarrow y^{mn} = x^n = z^m \Rightarrow (y^n)^m = z^m \Rightarrow y^n = z$. Значит, $(x^{1/m})^n = (x^n)^{1/m}$. Положим по определению $x^{\frac{n}{m}} = (x^{1/m})^n = (x^n)^{1/m}$.

Замечание 4.2. Определение степени с рациональным показателем x^r, $r \in \mathbb{Q}$, не зависит от представления $r = \frac{n}{m} = \frac{np}{mp}$, $p \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $y_1 = x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$, $y_2 = x^{\frac{np}{mp}} = \left(x^{\frac{1}{mp}}\right)^{np}$. Тогда $y_1^{mp} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{nmp} = \left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m\right)^{np} = x^{np}$, $y_2^{mp} = \left(x^{\frac{1}{mp}}\right)^{npmp} = \left(\left(x^{\frac{1}{mp}}\right)^{mp}\right)^{np} = x^{np}$, то есть $y_1^{mp} = y_2^{mp}$. В силу строгой монотонности степенной функции, заключаем, что $y_1 = y_2$.

---

[2] теорема 3.3 об обратной функции была доказана нами для сегментов, однако ее легко можно обобщить на случай бесконечного промежутка

Введем обозначения: $r = \dfrac{a}{b}$, $r_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$, где $a, a_1 \in \mathbb{Z}$, $b, b_1 \in \mathbb{N}$; $d = x^{\frac{1}{bb_1}}$, $x > 0$ — вещественное число.

1. $x^r \cdot x^{r_1} = x^{r+r_1}$, так как

$$x^r \cdot x^{r_1} = x^{\frac{ab_1}{bb_1}} \cdot x^{\frac{a_1 b}{b_1 b}} = d^{ab_1} \cdot b^{a_1 b} = d^{ab_1 + a_1 b} = x^{\frac{ab_1 + a_1 b}{bb_1}} = x^{r+r_1}$$

2. $(x^r)^{r_1} = x^{rr_1}$, так как $(x^r)^{r_1} = \left(x^{\frac{ab_1}{bb_1}}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} = \left(d^{ab_1}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} =$

$$= \left(\left(d^{ab_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}\right)^{a_1} (d^a)^{a_1} = d^{aa_1} = x^{\frac{aa_1}{bb_1}} = x^{rr_1}.$$

3. Если $x > 1$, $r > r_1$, то $x^r > x^{r_1}$, так как

$$d > 1, ab_1 > a_1 b \Rightarrow d^{ab_1} > d^{a_1 b} \Rightarrow x^{\frac{ab_1}{bb_1}} > x^{\frac{a_1 b}{b_1 b}} \Rightarrow x^r > x^{r_1}.$$

Показательная функция.

Мы хотим определить показательную функцию e^α для произвольного показателя $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажем сначала вспомогательное неравенство:

Лемма 4.1. $$e^r - 1 < \frac{r}{1-r} \; \forall r \in \mathbb{Q}, \quad 0 < r < 1. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Поскольку для любого натурального n справедливы неравенства $(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$, то

а) $1 + 1/n < e^{\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; б) $e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + 1/n = \dfrac{1}{1 - 1/(n+1)}$, значит, $e^{-\frac{1}{n+1}} > 1 - 1/(n+1)$. Обозначим $-(n+1) = k$, получим, что $e^{\frac{1}{k}} > 1 + 1/k$, где $k = -1, -2, -3, \dots$. Из пунктов а), б) следует, что

$$e^{\frac{1}{n}} > 1 + 1/n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \qquad (4.2)$$

Пусть теперь $r = m/n$, где m — натуральное число или 0, а n — целое, не равное 0. Тогда $e^r = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m > (1+1/n)^m \geqslant 1 + m/n = 1 + r$. При выводе последнего неравенства мы воспользовались оценкой (4.2) и неравенством Бернулли. Предположим теперь, что $0 < r < 1$, тогда $e^{-r} > 1 - r$, следовательно, $e^r < 1/(1-r) = 1 + r/(1-r)$, то есть справедлива оценка (4.1). □

Определение 4.5. *Для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ числом e^α будем называть такое вещественное число, для которого выполняются неравенства $e^{r_1} \leqslant e^\alpha \leqslant e^{r_2}$ для любых r_1, $r_2 \in \mathbb{Q}$, таких, что $r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2$.*

Лемма 4.2. *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ число e^α существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим множества $M_1 = \{e^r \,|\, r \leqslant \alpha, r \in \mathbb{Q}\}$, $M_2 = \{e^r \,|\, r \geqslant \alpha, r \in \mathbb{Q}\}$. Заметим, что множество M_1 не пусто и ограничено сверху (например, числом $e^{[\alpha]+1}$); множество M_2 также не пусто и ограничено снизу (например, числом $e^{[\alpha]}$). Обозначим $\gamma_1 = \sup M_1$, $\gamma_2 = \inf M_2$ и докажем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Действительно, если некоторое рациональное число $r \geqslant \alpha$, то $e^r \geqslant \gamma_1$ (так как e^r — какая-то из верхних граней множества M_1, γ_1 — его точная верхняя грань). Значит, любой элемент множества M_2 больше или равен числа γ_1, следовательно, точная нижняя грань этого множества $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$. Покажем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Выберем рациональное число δ, $0 < \delta < 1$. Тогда найдутся такие рациональные числа r_1, r_2, что $[\alpha] \leqslant r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2 \leqslant [\alpha]+1$, $r_2 - r_1 < \delta$ (свойства вещественных чисел). Значит, $e^{[\alpha]} \leqslant e^{r_1} \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant e^{r_2} \leqslant e^{[\alpha]+1}$. Отсюда получаем:

$$0 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 \leqslant e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}\left(e^{r_2 - r_1} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{[\alpha]+1}\left(e^{r_2-r_1} - 1\right) \leqslant e^{[\alpha]+1}\frac{r_2 - r_1}{1-(r_2-r_1)} < e^{[\alpha]+1}\frac{\delta}{1-\delta} \qquad (4.3)$$

(мы воспользовались неравенством (4.1)). Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим $\delta = \varepsilon/(\varepsilon + e^{[\alpha]+1})$. Тогда $0 < \delta < 1$ и из (4.3) следует, что $0 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε отсюда заключаем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Обозначим $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$. Заметим, что число γ удовлетворяет определению 4.5. Предположим, что существует некоторое число q, также удовлетворяющее этому определению, то есть такое, что $e^{r_1} \leqslant q \leqslant e^{r_2}$ для любых рациональных чисел r_1, r_2, $r_1 \leqslant r_2$. Но тогда $\gamma_1 \leqslant q \leqslant \gamma_2$, то есть $q = \gamma$. □

Заметим, что, если $\alpha = m/n$ — рациональное число, то $\sup M_1 = \inf M_2 = e^{\frac{m}{n}}$, то есть наше определение корректно (совпадает с введенным ранее определением степени с рациональным показателем).

Отметим некоторые свойства степени с вещественным показателем.

Лемма 4.3. *а) Если $\alpha < \beta$, то $e^\alpha < e^\beta$; б) $e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; в) Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}$; тогда для любого рационального $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|e^\alpha - e^{\alpha_0}| < \varepsilon$ $\forall \alpha \in B_\delta(\alpha_0)$.*

Доказательство. а) Из свойств вещественных чисел мы знаем, что если $\alpha < \beta$, то найдутся такие рациональные числа r_1, r_2, что $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$ и, следовательно, $e^\alpha \leqslant e^{r_1} < e^{r_2} \leqslant e^\beta$ (строгое неравенство здесь следует из соответствующего свойства степени с рациональным показателем, нестрогие — из определения e^α и e^β).

б) Пусть $\varepsilon > 0$ — рациональное. Положим $\delta = \varepsilon/(\varepsilon + e^{[\alpha]+[\beta]+2})$ (здесь и далее через $[x]$ обозначена целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Тогда $0 < \delta < 1$ и найдутся такие рациональные числа r_1', r_2', r_1'', r_2'', что $r_1' < \alpha < r_1'' < [\alpha]+1$, $r_1''-r_1' < \delta/2$; $r_2' < \beta < r_2'' < [\beta]+1$, $r_2''-r_2' < \delta/2$. Обозначим $r' = r_1' + r_2'$, $r'' = r_1'' + r_2''$. Тогда $r' < \alpha+\beta < r''$, $r'' - r' < \delta$, причем $r'' < [\alpha]+[\beta]+2$. Отсюда $e^{r'} < e^{\alpha+\beta} < e^{r''} < e^{[\alpha]+[\beta]+2}$ и $e^{r'} = e^{r_1'+r_2'} = e^{r_1'} \cdot e^{r_2'} < e^\alpha \cdot e^\beta < e^{r_1''} \cdot e^{r_2''} = e^{r_1''+r_2''} = e^{r''}$.

Значит, $|e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha} \cdot e^{\beta}| < e^{r''} - e^{r'} = e^{r'}\left(e^{r''-r'} - 1\right) <$

$$< e^{[\alpha]+[\beta]+2}\left(e^{r''-r'} - 1\right) < e^{[\alpha]+[\beta]+2}(\delta/(1-\delta)) = \varepsilon$$

(здесь мы опять воспользовались неравенством (4.1)). В силу произвольности выбора ε получаем, что $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta}$.

в) Положим $\delta = \varepsilon/(2(\varepsilon + e^{[\alpha_0]+2}))$; тогда $0 < \delta < 1$. Пусть α — вещественное число, такое, что $0 < \alpha - \alpha_0 < \delta$. Тогда найдутся такие рациональные числа r_1, r_2, что $r_1 < \alpha_0 < \alpha < r_2 < [\alpha_0] + 2$, $r_2 - r_1 < 2\delta$. Значит,

$$e^{r_1} < e^{\alpha_0} < e^{\alpha} < e^{r_2} < e^{[\alpha_0]+2},$$

следовательно, $0 < e^{\alpha} - e^{\alpha_0} < e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}\left(e^{r_2-r_1} - 1\right) <$

$$< e^{[\alpha_0]+2}\left(e^{r_2-r_1} - 1\right) < e^{[\alpha_0]+2}(2\delta/(1-2\delta)) = \varepsilon$$

(снова воспользовались оценкой (4.1)). Совершенно аналогичные рассуждения можно провести для случая $0 < \alpha_0 - \alpha < \delta$. □

Подытожим доказанные выше свойства:

Теорема 4.2. *Показательная функция $y = f(x) = e^x$ обладает следующими свойствами:*

1) область определения — вся числовая ось;

2) функция возрастает на области определения;

3) функция непрерывна на области определения;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;

5) множество значений — промежуток $(0, +\infty)$.

Доказательство. Утверждение пункта 1) следует из определения степени с произвольным вещественным показателем и из леммы 4.3, а); утверждение пункта 2) — из леммы 4.3, а); утверждение пункта 3) — из леммы 4.3, в).

Проверим утверждение пункта 4). Пусть n — произвольное натуральное число; x — вещественное число; $x > n$. Тогда

$$e^x > e^n = (1 + e - 1)^n \geqslant 1 + n(e-1)$$

(применили неравенство Бернулли). Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + n(e-1)) = +\infty$, то, переходя к неравенству в пределе, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Пусть теперь n — произвольное натуральное число; x — вещественное число; $x < -n$. Тогда

$$0 < e^x < e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \frac{1}{(1+e-1)^n} \leqslant \frac{1}{1+n(e-1)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n(e-1)} = 0$, то получаем, что $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Докажем утверждение пункта 5). Пусть $y > 0$ — произвольное вещественное число. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то найдется такое вещественное число b, что $e^b > y$. С другой стороны, поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, то найдется такое вещественное число a, что $0 < e^a < y$. В силу доказанного выше e^x — непрерывная монотонная на сегменте $[a, b]$ функция, значит, она принимает все промежуточные значения между e^a и e^b. Следовательно, существует вещественное число c такое, что $e^c = y$. В силу произвольности выбора положительного значения y заключаем, что множеством значений функции e^x является весь промежуток $(0, +\infty)$. □

Отметим, что существует и другой, так называемый аксиоматический подход к определению показательной функции e^x, согласно которому она определяется как функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$; 2) $f(1) = e$, $f(0) = 1$;

3) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Можно показать, что это определение корректно.

Логарифмическая функция.

1) Функция $y = \ln x$ — обратная к функции $x = e^y$. Из свойств функции e^y и теоремы об обратной функции следует, что она возрастает и непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$.

2) Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Для произвольного вещественного числа y положим по определению $a^y = e^{y \ln a}$. Тогда функция $x = a^y$ определена на всей числовой оси; непрерывна (как композиция непрерывных функций); возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$ (это проверяется непосредственно).

3) **Логарифмическая функция** $y = f(x) = \log_a x$ — обратная к функции $x = a^y$. Из свойств функции a^y и теоремы об обратной функции следует, что область определения логарифмической функции — промежуток $(0, +\infty)$; множество значений — вся числовая ось; функция непрерывна на области определения; возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$.

Степенная функция.

Пусть α — произвольное вещественное число, $\alpha \neq 0$. **Степенная функция** $y = f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Область определения — промежуток $(0, +\infty)$; множество значений — промежуток $(0, +\infty)$; непрерывна на области определения (как композиция непрерывных функций); возрастает при $\alpha > 0$, убывает при $\alpha < 0$ (проверяется непосредственно).

Тригонометрические функции.

К тригонометрическим функциям относятся функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Определения и основные свойства этих функций известны из школьной программы; они опираются на геометрические соображения. Можно определить тригонометрические функции и другими способами, аналитическими, однако для этого нужны сведения из теории рядов или дифференциальных уравнений, которыми мы пока не обладаем. Впрочем, известных нам определений будет вполне достаточно. Напомним основные свойства тригонометрических функций (без доказательства).

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой оси; множество значений — отрезок $[-1, 1]$; периодическая с периодом 2π; возрастает на промежутках $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$, убывает на промежутках $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$; нечетная.

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой оси; множество значений — отрезок $[-1, 1]$; периодическая с периодом 2π; возрастает на промежутках $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$, убывает на промежутках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$; четная.

Функция $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ определена на всей числовой оси за исключением точек $\pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — вся числовая ось; периодическая с периодом π; возрастает на промежутках $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечетная.

Функция $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ определена на всей числовой оси за исключением точек πn, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — вся числовая ось; периодическая с периодом π; убывает на промежутках $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечетная.

Докажем теперь, что каждая из тригонометрических функций является непрерывной на области своего определения. Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

Лемма 4.4. *Для любого вещественного значения x справедливо неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$.*

Доказательство проведем, исходя из геометрических соображений (см. Рис. 5 ниже). При $x = 0$ неравенство очевидно. Пусть $0 < |x| < \pi/2$. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат — точке O. Пусть C — точка пересечения окружности и оси Ox; точка A принадлежит первой координатной четверти и лежит на окружности так, что $\angle AOC = |x|$; точка B принадлежит четвертой четверти и лежит на окружности так, что $\angle AOC = \angle BOC$. Тогда дуга окружности AB имеет длину $2|x|$; длина отрезка AB равна $2\sin|x|$. Так как длина хорды окружности не превосходит длины соответствующей дуги, то можем утверждать, что в случае $0 < |x| < \pi/2$ выполнено: $|\sin x| \leqslant |x|$.

Если $|x| \geqslant \pi/2$, то утверждение леммы следует из цепочки неравенств $|\sin x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant |x|$. □

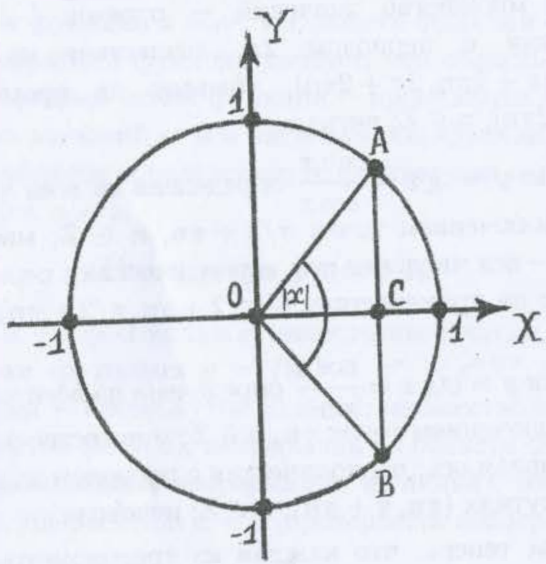

Рис. 5: Иллюстрация к доказательству Леммы 4.4.

Выберем теперь произвольную точку x_0 на числовой оси. Получаем, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует значение $\delta = \varepsilon$, такое, что при всех $x \in B_\delta(x_0)$

выполнено: $|\sin x - \sin x_0| =$

$$= 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < 2\cdot\frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна на всей числовой оси. Непрерывность функции $y = \cos x$ на всей числовой оси следует из аналогичных рассуждений и цепочки неравенств

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < \varepsilon.$$

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны на областях своего определения как частные от деления непрерывных функций.

Обратные тригонометрические функции.

Функция **арксинус**: $y = f(x) = \arcsin x$ — обратная к функции $x = \sin y$ на сегменте $[-\pi/2, \pi/2]$; область определения — сегмент $[-1, 1]$; множество значений — сегмент $[-\pi/2, \pi/2]$; возрастает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции); нечетная.

Функция **арккосинус**: $y = f(x) = \arccos x$ — обратная к функции $x = \cos y$ на сегменте $[0, \pi]$; область определения — сегмент $[-1, 1]$; множество значений — сегмент $[0, \pi]$; убывает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции).

Функция **арктангенс**: $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$ — обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$; область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(-\pi/2, \pi/2)$; возрастает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции); нечетная.

Функция **арккотангенс**: $y = f(x) = \operatorname{arcctg} x$ — обратная к функции $x = \operatorname{ctg} y$ на интервале $(0, \pi)$; область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(0,\pi)$; убывает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции).

Ниже мы дадим определения и опишем основные свойства гиперболических и обратных гиперболических функций. Эти функции не являются простейшими элементарными: они строятся из показательных, логарифмических и степенных с помощью арифметических операций и операции композиции. При решении задач, однако, часто бывает удобно пользоваться именно гиперболическими и обратными к ним функциями, не «раскладывая» их на простейшие.

Гиперболические функции.

Синус гиперболический: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — вся числовая ось; возрастает на области определения; непрерывна на области определения; нечетная.

Косинус гиперболический: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — промежуток $[1,+\infty)$; убывает на промежутке $(-\infty,0]$, возрастает на промежутке $[0,+\infty)$; непрерывна на области определения; четная.

Тангенс гиперболический: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(-1,1)$; возрастает на области определения; непрерывна на области определения; нечетная.

Котангенс гиперболический: $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Область определения — множество $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; множество значений — $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; убывает на промежутках $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$; непрерывна на области определения; нечетная.

Некоторые полезные соотношения, связанные с гиперболическими функциями (проверяются непосредственно):

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};\ \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch}(x\pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Обратные гиперболические функции.

Функция **ареа-синус гиперболический**: $y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ — обратная к функции $x = \operatorname{sh} y$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — вся числовая ось; возрастает и непрерывна на области определения; нечетная.

Функция **ареа-косинус гиперболический**: $y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ — обратная к функции $x = \operatorname{ch} y$ на промежутке $[0,+\infty)$. Область определения — промежуток $[1,+\infty)$; множество значений — промежуток $[0,+\infty)$; возрастает и непрерывна на области определения.

Функция **ареа-тангенс гиперболический**: $y = \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ — обратная к функции $x = \operatorname{th} y$. Область определения — интервал $(-1,1)$; множество значений — вся числовая ось; возрастает и непрерывна на области определения; нечетная.

Функция **ареа-котангенс гиперболический**: $y = \operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ — обратная к функции $x = \operatorname{cth} y$. Область определения — множество $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; множество значений — $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; убывает на промежутках $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$; непрерывна на области определения; нечетная.

§5. Замечательные пределы.

Докажем два полезных соотношения, связанных с элементарными функциями.

Теорема 5.1 (первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат — точке O (см. Рис. 6 ниже). Пусть A — точка пересечения окружности с осью Ox; точка B принадлежит первой координатной четверти и лежит на окружности так, что $\angle AOB=x$; точка C лежит на луче OB так, что $CA\bot OA$. Тогда площадь треугольника AOB равна $\dfrac{1}{2}\sin x$; площадь сектора AOB равна $\dfrac{1}{2}x$; площадь треугольника AOC равна $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x$. Из геометрических соображений заключаем, что $\sin x\leqslant x\leqslant \operatorname{tg}x$, следовательно, $1\leqslant\dfrac{x}{\sin x}\leqslant\dfrac{1}{\cos x}$. Отсюда получаем двойное неравенство $\cos x\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant 1$. Так как крайняя левая и крайняя правая части последнего неравенства стремятся к единице при $x\to 0+0$, то получаем, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Теперь утверждение теоремы следует из следующей цепочки соотношений: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{\sin(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{\sin t}{t}=1.$ □

Следствие. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

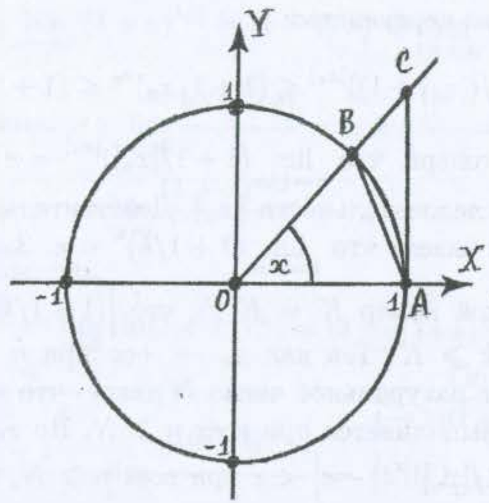

Рис. 6: Иллюстрация к доказательству Теоремы 5.1.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\{t=\arcsin x\}=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\{t=\operatorname{arctg}x\}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\operatorname{tg}t}=1.$ □

Теорема 5.2 (второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Доказательство. 1) Пусть $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисел; $x_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Тогда $[x_n]\leqslant x_n<[x_n]+1$, $[x_n]\to+\infty$ при $n\to+\infty$ ($[x_n]$ — целая часть x_n). Не ограничивая общности, можем считать, что $[x_n]>0$. Значит, $1+1/([x_n]+1)\leqslant 1+1/x_n\leqslant 1+1/[x_n]$ и справедливо неравенство:

$$(1+1/([x_n]+1))^{[x_n]} \leqslant (1+1/x_n)^{x_n} \leqslant (1+1/[x_n])^{[x_n]+1}.$$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/[x_n])^{[x_n]} = e$ при любом выборе последовательности $\{x_n\}$. Действительно, выберем $\varepsilon > 0$. Мы знаем, что $\lim\limits_{k\to+\infty}(1+1/k)^k = e$. Значит, существует такой номер $K = K(\varepsilon)$, что $\left|(1+1/k)^k - e\right| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant K$. Так как $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, то существует натуральное число N такое, что неравенство $[x_n] \geqslant K$ выполняется при всех $n \geqslant N$. Но это означает, что $\left|(1+1/[x_n])^{[x_n]} - e\right| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, то есть что $(1+1/[x_n])^{[x_n]} \to e$ при $n \to +\infty$. Отсюда получаем, что при $n \to +\infty$: $\left(1+\dfrac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} =$

$$= \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1} \to e\cdot 1 = e,$$

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right) \to e\cdot 1 = e,$$

следовательно (по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей), $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/x_n)^{x_n} = e$. Согласно определению предела по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$.

2) Пусть теперь x стремится к $-\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} =$$

$$= \{t=-x-1\} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e\cdot 1 = e.$$

3) Наконец, $\lim\limits_{x\to\pm 0}(1+x)^{1/x} = \{t=1/x\} = \lim\limits_{t\to\pm\infty}(1+1/t)^t = e$.
□

Следствие. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{1/x}\right) = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Отсюда: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \{t=a^x-1\} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\ln a}{\ln(t+1)} = \ln a$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x} = \{a\ln(1+x) = t\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{e^{t/a}-1} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t/a}{e^{t/a}-1}\cdot a = a. \ \square$$

Напомним, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. На основании доказанного выше составим таблицу некоторых эквивалентностей (при $x\to 0$):

$$\sin x \sim x,\quad \operatorname{tg} x \sim x,\quad \arcsin x \sim x,\quad \operatorname{arctg} x \sim x$$

$$e^x-1 \sim x,\quad \ln(1+x) \sim x,\quad a^x-1 \sim x\ln a,\quad (1+x)^a-1 \sim ax$$

§6. Равномерная непрерывность функции.

Определение 6.1. *Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой пары точек x', x'' множества A, для которых верно неравенство $|x'-x''| < \delta$, будет выполнено: $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$.*

Замечание 6.1. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве A, то она непрерывна в любой точке $x_0 \in A$: положим в определении равномерной непрерывности $x'' = x_0$, получим, что для любого вещественного

$\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки x' множества A, для которой верно неравенство $|x' - x_0| < \delta$, будет выполнено: $|f(x') - f(x_0)| < \varepsilon$. Это в точности определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 6.1 (Кантор). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ будет существовать пара точек $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, для которых будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$. Обозначим $\delta_n = 1/n$ для любого натурального n. Согласно сказанному выше, найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального n будет существовать пара точек $x'_n, x''_n \in [a, b]$ таких, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена (так как $a \leqslant x'_n \leqslant b \ \forall n \in \mathbb{N}$), следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_n}\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_{k_n} = \xi$, тогда $\xi \in [a, b]$. Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x''_{k_n}\}$ последовательности $\{x''_n\}$. Поскольку для любого натурального n выполняется неравенство $|x'_{k_n} - x''_{k_n}| < 1/k_n$, то получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_{k_n} = \xi$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке ξ, то $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_{k_n}) = f(\xi)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_{k_n}) = f(\xi)$. Но по построению последовательностей $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ должно выполняться неравенство: $|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geqslant \varepsilon$, где ε — фиксированное число. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на сегменте $[a, b]$. $\square$

Замечание 6.2. Наличие или отсутствие равномерной непрерывности функции $f(x)$ зависит не только от свойств

непрерывности этой функции, но и от множества, на котором она рассматривается.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 6.1. *Функция $y = x^2$, равномерно непрерывная на любом сегменте (по теореме Кантора), не является равномерно непрерывной, например, на бесконечном промежутке $[1, +\infty)$, так как существует число $\varepsilon = 2$ такое, что для любого натурального числа n найдутся точки $x'_n = n + 1/n$, $x''_n = n$, удовлетворяющие условию $|x'_n - x''_n| = 1/n$, для которых будет выполнено:*

$$\left|(x'_n)^2 - (x''_n)^2\right| = \left|(n + 1/n - n)\,(n + 1/n + n)\right| =$$

$$= 1/n\,(2n + 1/n) > (1/n) \cdot 2n = 2 = \varepsilon.$$

Пример 6.2. *Рассмотрим функцию $f(x)$ такую, что $f(x) = 1$ при $x \in (0, 1)$ и $f(x) = 2$ при $x \in (1, 2)$. Она, очевидно, равномерно непрерывна на каждом из интервалов $(0, 1)$ и $(1, 2)$, но легко проверить, что она не является равномерно непрерывной на их объединении.*

Глава 3. Задачи.

§1. Определения предела (предельного значения) функции.

Здесь мы рассмотрим задачи на понимание определений предела функции по Коши и по Гейне.

1.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

Решение. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$, где $x_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \to 0$, $y_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{6}} \to 0$. Заметим, что $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = 1$, $f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \frac{1}{2}$, для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = 1$, а $\lim\limits_{x\to\infty} f(y_n) = \frac{1}{2}$. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$ не существует, что и требовалось доказать.

1.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, пользуясь определением предела по Коши и указав по любому $\varepsilon > 0$ соответствующее ему (какое-нибудь) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Решение. Воспользуемся определением предела по Коши. Заметим, что неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ эквивалентно двойному неравенству: $\sqrt{4-\varepsilon} < |x| = \pm x < \sqrt{4+\varepsilon}$. Из двух возможных интервалов для x выбираем тот, в котором содержится число 2, а именно, интервал: $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$. Определим, при каких $\delta > 0$ полученное неравенство для $|x|$ следует из неравенства: $0 < |x-2| < \delta$. То есть при каких $\delta > 0$ $\delta-$окрестность точки 2 содержится в интервале $(\sqrt{4-\varepsilon}; \sqrt{4+\varepsilon})$. Ясно, что δ должно удовлетворять неравенству: $0 < \delta < \min\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\}$. Вычисления показывают, что $\min\{\sqrt{4+\varepsilon}-2, 2-\sqrt{4-\varepsilon}\} = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы нашли $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-2| < \delta$, верно неравенство: $|x^2 - 4| < \varepsilon$.
Ответ: $0 < \delta \le \sqrt{4+\varepsilon} - 2$.

1.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} |b_0x^n + ... + b_{n-1}x + b_n| = +\infty$, где $b_0 \ne 0$. Воспользоваться определением предела по Коши

и указать по любому $\varepsilon > 0$ соответствующее ему (какое-нибудь) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Решение. Рассмотрим неравенство:

$$|b_0x^n + ... + b_{n-1}x + b_n| > \varepsilon. \tag{1}$$

Для упрощения его решения рассмотрим более сильное неравенство: $|b_0x^n + ... + b_{n-1}x + b_n| \ge |b_0x^n| - (|b_1x^{n-1}| + ... + |b_{n-1}x| + |b_n|) > \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно следующему:

$$|x^n| > |\frac{b_1}{b_0}x^{n-1}| + ... + |\frac{b_{n-1}}{b_0}x| + \frac{|b_n| + \varepsilon}{|b_0|} \tag{2}$$

Посмотрим, какое неравенство для x является достаточным для его выполнения. Пусть, например, каждое слагаемое в правой части меньше, чем $\frac{|x|^n}{n}$, то есть пусть

$$|\frac{b_1}{b_0}x^{n-1}| < \frac{|x|^n}{n}, ..., |\frac{b_{n-1}}{b_0}||x| < \frac{|x|^n}{n}, \frac{|b_n| + \varepsilon}{|b_0|} < \frac{|x|^n}{n}. \tag{3}$$

Сокращая неравенства (3) на $|x|$ в соответствующих степенях, умножая их на n и извлекая корень соответствующей степени, приходим к следующим неравенствам для $|x|$:

$$n|\frac{b_1}{b_0}| < |x|, ..., (n|\frac{b_{n-1}}{b_0}|)^{\frac{1}{n-1}} < |x|, (n\frac{|b_n| + \varepsilon}{|b_0|})^{\frac{1}{n}} < |x|.$$

Таким образом, получаем для $|x|$ итоговое неравенство:

$$|x| > \max\{n|\frac{b_1}{b_0}|, ..., (n|\frac{b_{n-1}}{b_0}|)^{\frac{1}{n-1}}, (n\frac{|b_n| + \varepsilon}{|b_0|})^{\frac{1}{n}}\}$$

Отсюда получаем, что при любом $\delta = \delta(\varepsilon)$, удовлетворяющем неравенству:

$$\delta > \max\{n|\frac{b_1}{b_0}|, ..., (n|\frac{b_{n-1}}{b_0}|)^{\frac{1}{n-1}}, (n\frac{|b_n| + \varepsilon}{|b_0|})^{\frac{1}{n}}\},$$

из неравенства: $|x| > \delta$ будет следовать неравенство (2), а значит, и исходное неравенство (1). Согласно определению предела функции по Коши, это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} |b_0x^n + \ldots + b_{n-1}x + b_n| = +\infty$, что и требовалось доказать.

1.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2}{3} - 0$, указав, согласно определению предела по Коши, для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее ему (какое-нибудь) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Решение. Во-первых, заметим, что $\dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} < \dfrac{2}{3}$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство: $\dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} > \dfrac{2}{3} - \varepsilon$. Если оно верно для любого x, удовлетворяющего неравенству $-\delta < x < 0$ для некоторого $\delta > 0$, то для сравнения δ и ε можно воспользоваться следующей цепочкой неравенств:

$$\frac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} > \frac{2}{3+e^{-\frac{1}{\delta}}} \geq \frac{2}{3} - \varepsilon = \frac{2-3\varepsilon}{3},$$

откуда получаем: $\dfrac{3+e^{-\frac{1}{\delta}}}{2} \leq \dfrac{3}{2-3\varepsilon}$. Следовательно, $e^{-\frac{1}{\delta}} \leq \dfrac{6}{2-3\varepsilon} - 3 = \dfrac{9\varepsilon}{2-3\varepsilon}$. Отсюда, предполагая (без потери общности), что $\varepsilon < \frac{2}{3}$ и логарифмируя, имеем: $-\dfrac{1}{\delta} \leq \ln\dfrac{9\varepsilon}{2-3\varepsilon}$, то есть $-\delta \geq (\ln\dfrac{9\varepsilon}{2-3\varepsilon})^{-1}$, что равносильно неравенству: $\delta \leq (\ln\dfrac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon})^{-1}$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$, взяв положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) \leq (\ln\dfrac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon})^{-1}$, получаем, что для любого x, $-\delta < x < 0$, верно, что $\dfrac{2}{3} > \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} > \dfrac{2}{3} - \varepsilon$. Согласно определению предела функции по Коши, это означает, что $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2}{3} - 0$, что и требовалось доказать.

1.5. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} = +0$, указав, согласно определению предела по Коши, для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее ему (какое-нибудь) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Решение. Очевидно, что $\dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ неравенство: $0 < \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon$ при $x > 0$. Решая правую часть этого двойного неравенства, получаем: $e^{\frac{1}{x}} > \dfrac{2}{\varepsilon} - 3$. Полагая (без потери общности), что $\dfrac{2}{\varepsilon} - 3 > 0$, и логарифмируя, имеем: $\dfrac{1}{x} > \ln\dfrac{2-3\varepsilon}{\varepsilon}$, то есть $x < (\ln\dfrac{2-3\varepsilon}{\varepsilon})^{-1}$. Отсюда следует, что для любого x, для которого верно неравенство: $0 < x < \delta(\varepsilon) \leq (\ln\dfrac{2-3\varepsilon}{\varepsilon})^{-1}$, необходимо верно неравенство $0 < \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon$. Согласно определению предела функции по Коши, это означает, что $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{2}{3+e^{\frac{1}{x}}} = +0$, что и требовалось доказать.

1.6. Пусть $D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное}, \\ 0, & x - \text{иррациональное} \end{cases}$ - функция Дирихле. Доказать, что она не имеет предела ни в одной точке.

Решение. Действительно, пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда существует такая последовательность $\{x'_n\}$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = a$, $x'_n \neq a$, x'_n рациональные, и существует последовательность $\{x''_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = a$, $x''_n \neq a$, x''_n иррациональные. Отсюда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n) = 0$. Значит, согласно определению по Гейне, функция $f(x)$ не имеет предела в точке a.

Задачи для самостоятельной работы.

1.7. Рассмотрим функцию

$$f(x) = sgnx = \begin{cases} -1, \ x < 0, \\ \ \ 0, \ x = 0, \\ \ \ 1, \ x > 0. \end{cases}$$

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sgn} x$ не существует.

1.8. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \sin\frac{1}{x}) = 0$, указав для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее $\delta(\varepsilon)$.

1.9. Доказать, что $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x}{1+2x} = \frac{3}{2} + 0$, указав для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее $\delta(\varepsilon)$.

1.10. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2x + 1) = 4$, указав для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее $\delta(\varepsilon)$.

1.11. Доказать, что $\lim\limits_{x\to -0} 3^x = 1 - 0$, указав для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее $\delta(\varepsilon)$.

§2. Простейшие приемы вычисления пределов.

Рассмотрим несколько примеров вычисления пределов функций с использованием теорем об арифметических операциях над функциями, имеющими конечные пределы, а также прием замены переменной.

2.1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3}{3x^2+x-5}$.

Решение. Используя результат задачи 1.2 выше, условие $x \to 2$, а также теорему об арифметических операциях над функциями, имеющими конечные пределы, получаем: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3}{3x^2+x-5} = \frac{4-3}{3\cdot 4+2-5} = \frac{1}{9}$.

2.2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+2)-(x)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = (\sqrt{x+2}+\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty) = 0.$

2.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\frac{2\pi x}{5x+1})^x$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\pi x}{5x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\pi}{5+\frac{1}{x}} = \frac{2\pi}{5} - 0$, так как $0 < \frac{2\pi}{5+\frac{1}{x}} < \frac{2\pi}{5}$ при любом $x > 0$. Кроме того, $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, поэтому при $x > 0$, в силу возрастания синуса в первой четверти, всегда $0 < \sin\frac{2\pi x}{5x+1} < \sin\frac{2\pi}{5} = \alpha < 1$. Следовательно,

$$0 < (\sin\frac{2\pi x}{5x+1})^x < \alpha^x, x > 0 \qquad (4)$$

Взяв любую последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $x_n > 0$, сходящуюся к $+\infty$, получим, что $\alpha^{x_n} \to 0$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ (в силу определения предела функции по Гейне). Отсюда, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве (4), следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\frac{2\pi x}{5x+1})^x = 0$.

2.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

Решение. Используя алгебраические преобразования и сокращая на $(x-3) \neq 0$, получаем цепочку равенств: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}$.

2.5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^3-1}$.

Решение. Используя замену переменной, алгебраические преобразования и сокращая на новую переменную $t \neq 0$, получаем следующие равенства: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = (x = t+1) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{(t+1)^7-1}{(t+1)^3-1} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{7t+\alpha(t)\cdot t}{3t+\beta(t)\cdot t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{7+\alpha(t)}{3+\beta(t)} =$ (где $\alpha(t), \beta(t) -$ бесконечно малые при $t \to 0$) $= \frac{7}{3}$.

2.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$.

Решение. Воспользуясь заменой переменной, алгебраическими преобразованиями и сокращая на $t^2\neq 0$, получим цепочку равенств: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)=(\infty-\infty)=$ (положим $x=t+1$) $=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{5}{(t+1)^5-1}-\dfrac{7}{(t+1)^7-1}\right)=$ $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{5}{5t+(10+\alpha)t^2}-\dfrac{7}{7t+(21+\beta)t^2}\right)=(\alpha=\alpha(t),\beta=$ $\beta(t)$–бесконечно малые при $t\to 0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{35t^2+5\beta t^2-7\alpha t^2}{35t^2+\gamma t^2}$ $=($ где $\gamma=\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{35+5\beta-7\alpha}{35+\gamma}=1.$

2.7. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}=$ $(\infty-\infty)=(t=\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(t+\sqrt{t+\sqrt{t}})-(t-\sqrt{t+\sqrt{t}})}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\sqrt{t+\sqrt{t}})+\sqrt{t+\sqrt{t}})}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}=\left(\begin{array}{l}\text{сократим}\\ \text{на }\sqrt{t}\text{ и пе-}\\ \text{рейдем к }x\end{array}\right)$$

$$=2\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}+\sqrt{1-\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}}=1.$$

2.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\left(\begin{array}{l}\text{сократим}\\ \text{на }\sqrt{x}\end{array}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x^{-1}+\sqrt{x^{-3}}}}}{\sqrt{1+x^{-1}}}=(x^{-1}\to+0)=1.$$

Задачи для самостоятельной работы.

Вычислить пределы:

2.9 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+\sqrt{x}}-\sqrt{2x-1})$.

2.10 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

2.11 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2^5}{x^3-2^3}$.

2.12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x-\sqrt{2x-\sqrt{2x}}}}{\sqrt{5x-1}}$.

2.13 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{3}{x}+\sqrt{\dfrac{2}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{5}{x}+\sqrt{\dfrac{7}{x}}}}\right)$.

Ответы:

2.9. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; **2.10.** $\dfrac{1}{3}$; **2.11.** $\dfrac{20}{3}$; **2.12.** $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$; **2.13.** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

§3. Вычисление пределов функций с помощью I и II замечательныех пределов.

В следующих примерах используется непрерывность элементарных функций, прием замены переменной, а также I и II замечательные пределы и следствия из них.

3.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 5x-\cos 5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. Используя тригонометрические преобразования и I замечательный предел, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 5x-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin\frac{x}{2})^2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2(\sin\frac{5x}{2})^2+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\frac{5x}{2}}{\sin\frac{5x}{2}(\sin\frac{5x}{2}+\cos\frac{5x}{2})\cdot 5\cdot\frac{x}{2}}=\left(\begin{array}{l}\sin\alpha\xrightarrow[\alpha\to 0]{}0,\\ \cos\alpha\xrightarrow[\alpha\to 0]{}1\end{array}\right)=\frac{1}{5}.$$

3.2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} = (0\cdot\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} = (\text{замена: } x = t+2) =$

$$= -\lim_{t\to 0} t\operatorname{tg}\frac{\pi(t+2)}{4} = \lim_{t\to 0} t\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{4} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi t}{4}}{\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi t}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

3.3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = (\text{замена } x = t + \dfrac{\pi}{3}) =$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{3})[\operatorname{tg}^2(t+\frac{\pi}{3})-3]}{\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \left(\begin{array}{l}\text{применим формулу tg}\\ \text{суммы; } \operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow[t\to 0]{} \sqrt{3}\\ \cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t\end{array}\right)$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}(\operatorname{tg}^2(t) + 8\operatorname{tg} t\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} - 3 - 3\operatorname{tg}^2 t\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3})}{\sin(t)(1-\operatorname{tg} t\operatorname{tg}\frac{\pi}{3})^2} =$$

$$(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}) = -\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} t(8\sqrt{3} - 8\operatorname{tg} t)}{\sin(t)(1-\operatorname{tg} t\sqrt{3})^2} = -24.$$

3.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+\frac{5\pi}{2})\operatorname{arctg} x}{\arcsin(2x^2)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+\frac{5\pi}{2})\operatorname{arctg} x}{\arcsin(2x^2)} = \left(\begin{array}{l}\text{по формулам}\\ \text{приведения}\\ \cos(x+\frac{5\pi}{2}) = -\sin x\end{array}\right)$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\sin x\operatorname{arctg} x}{2x^2\arcsin(2x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

3.5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x\cdot x^4} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(-\sin^2 x)}{\cos^2 x\cdot x^4} = -1.$$

3.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}} = (1^\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}} = \left(\begin{array}{l}\text{преобразуем выраже-}\\ \text{ния в основании и в}\\ \text{показателе и восполь-}\\ \text{зуемся II замечате-}\\ \text{льным пределом}\end{array}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2+x}\right)^{-(x+2)}\right]^{\frac{-(1+x)}{(x+2)(1+\sqrt{x})}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(1+x)}{(x+2)(1+\sqrt{x})}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{комментарий: } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-(1+x)}{(x+2)(1+\sqrt{x})} =\\ = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}(1+\frac{2}{x})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = 0\end{array}\right) = e^0 = 1.$$

3.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = \left(\begin{array}{l}\text{преобразуем выражение}\\ \text{аналогично предыдуще-}\\ \text{му примеру.}\end{array}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{-1}{3x}}\right]^{\frac{-3x}{x}} = e^{-3}.$$

3.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln(\sin x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln(\sin x)} = (x = t + \dfrac{\pi}{2}) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2^{\sin^2 t}-1}{\ln(\cos t)} =$

$$= \left(\begin{array}{l}\text{используем в числителе эк-}\\ \text{вивалентность: } 2^\alpha - 1 \sim \alpha\ln 2\\ \text{при } \alpha\to 0,\ \text{а также преобра-}\\ \text{зуем знаменатель}\end{array}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln 2\cdot\sin^2 t}{\ln(1-2\sin^2\frac{t}{2})}$$

$$= \left(\begin{array}{l}\text{используем в знаменателе эк-}\\ \text{вивалентность: } \ln(1+\alpha)\sim\alpha\\ \text{при } \alpha\to 0 \text{ и далее I замеча-}\\ \text{тельный предел}\end{array}\right) = \ln 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{-2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$= \ln 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{-\frac{t^2}{2}} = -2\ln 2 = \ln\frac{1}{4}.$$

3.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x}-1}=(x=3+t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{e^{-\sin \pi t}-1}=$
$\left(\begin{array}{l}\text{воспользуемся экви-}\\ \text{валентностями ана-}\\ \text{логично примеру 3.8}\end{array}\right)=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\sin \pi t}=-\dfrac{2}{\pi}.$

3.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^{3x}-1)-(3^{2x}-1)}{x(1+\frac{\arcsin(x^3)}{x})}=3\ln 2-2\ln 3=$
$\left(\begin{array}{l}\text{использована эквивалентность вида:}\\ a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a,\ \text{при}\ \alpha\to 0,\ \text{а так-}\\ \text{же: }\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=0\end{array}\right)=\ln\left(\dfrac{8}{9}\right).$

Задачи для самостоятельной работы.

Вычислить следующие пределы:

3.11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}.$

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$

3.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}.$

3.14. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}.$

3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}.$

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg} 3x}.$

3.17. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg}(3^{\frac{\pi}{x}}-3)}{3^{\cos(\frac{3x}{2})}-1}.$

3.18. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+x^3))^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}.$

3.19. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$

3.20. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\ln(2-x)}}.$

Ответы:

3.11. $\cos a$; **3.12.** $\dfrac{4}{3}$; **3.13.** 0; **3.14.** $\dfrac{9}{98}$; **3.15.** $\dfrac{1}{4}$; **3.16.** $\ln\dfrac{125}{49}$;
3.17. $-\dfrac{2}{\pi}$; **3.18.** e^{-3}; **3.19.** $e^{\operatorname{ctg} a}$; **3.20.** e.

§4. Вычисление пределов на бесконечности.

В этом параграфе мы рассмотрим еще несколько примеров вычисления пределов при $x\to\pm\infty, x\to\infty$, пользуясь, как и выше, свойствами непрерывности элементарных функций.

4.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln[e^x(1+e^{-x})]}{x}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right)=$
$=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=1.$

4.2. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=(\infty-\infty).$

Решение. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=\left(\begin{array}{l}\text{Вынесем в зна-}\\ \text{менателе } |x|=\\ -x\text{ и сократим}\end{array}\right)$
$=-2\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-1.$

4.3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=(\infty-\infty).$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=\left(\begin{array}{l}\text{Вынесем в зна-}\\ \text{менателе } |x|=\\ x\text{ и сократим}\end{array}\right)$
$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1.$

4.4. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=(\infty\cdot 0)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}=\\ =\alpha\to 0,\\ \Rightarrow \alpha\sim\operatorname{tg}\alpha\end{pmatrix}$

$$=\lim_{x\to\infty} x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{x+1}}{1+(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4})\cdot\frac{x}{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{x}{x+1})}{1+\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

4.5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=(\infty\cdot 0)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\begin{pmatrix}\text{аналогично}\\ \text{примеру 4.4),}\\ \text{используем:}\\ \sin\alpha\underset{\alpha\to 0}{\sim}\alpha\end{pmatrix}$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\cos(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1.$$

Задачи для самостоятельной работы.

Вычислить следующие пределы:

4.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$.

4.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x^7+2)}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$.

Ответы:

4.6. $1-\sqrt[4]{4}$; **4.7.** $\sqrt[4]{4}-1$; **4.8.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$; **4.9.** $\frac{1}{5}$; **4.10.** 1.

§5. Асимптотическое сравнение функций. Символика "о-малое" и "О-большое".

Рассмотрим ряд задач, связанных с асимптотическим сравнением функций. Везде ниже будем предполагать, что $x\to a$, где a - некоторая заданная конечная точка или $+\infty$, $-\infty$, ∞. Символ "о-малое" и "О-большое" будем обозначать соответственно буквами $\bar{o}$, $\underline{O}$.

5.1. Доказать, что если $f(x)=\bar{o}(g(x))$, то $f(x)=\underline{O}(g(x))$. *Решение.* Условие: $f(x)=\bar{o}(g(x))$ по определению означает, что $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$. А так как всякая бесконечно малая функция при $x\to a$ является ограниченной в некоторой "проколотой" окрестности a, то согласно определению символа "О-большое" , это означает, что $f(x)=\underline{O}(g(x))$, что и требовалось доказать.

5.2. Доказать, что если $f(x)\sim g(x)$, то $\bar{o}(f(x))=\bar{o}(g(x))$. *Решение.* Условие: $f(x)\sim g(x)$ по определению означает, что $f(x)=\beta(x)\cdot g(x)$, где $\beta(x)$ имеет предел, равный 1, при $x\to a$. Следовательно, $\bar{o}(f(x))=\alpha(x)\beta(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая, а $\beta(x)$ стремится к 1 при $x\to a$. Но тогда, согласно свойствам функций, имеющих конечные пределы, произведение $\alpha(x)\beta(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$. следовательно, $\bar{o}(f(x))=\alpha(x)\beta(x)\cdot g(x)=\bar{o}(g(x))$, что и требовалось доказать.

5.3. Доказать, что $\underline{O}(\bar{o}(f(x)))=\bar{o}(\underline{O}(f(x)))=\bar{o}(f(x))$ *Решение.* Согласно определению "о-малого" и "О-большого", $\underline{O}(\bar{o}(f(x)))=\beta(x)\cdot(\alpha(x)\cdot f(x))$, где $\beta(x)$ ограничена в некоторой "проколотой" окрестности a, а $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$. Следовательно, произведение $\beta(x)\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$. Согласно определению "о-малого" , это означает, что $\underline{O}(\bar{o}(f(x)))=(\beta(x)\alpha(x))\cdot f(x)=\bar{o}(f(x))$. Таким же образом, $\bar{o}(\underline{O}(f(x)))=$

$\alpha(x)\cdot(\beta(x)\cdot f(x))$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$, а $\beta(x)$ ограничена в некоторой "проколотой" окрестности a. Поэтому $\bar{o}(\underline{O}(f(x))) = (\alpha(x)\cdot\beta(x))\cdot f(x)) = \bar{o}(f(x))$. С другой стороны, всякую функцию вида $\bar{o}(f(x))$ можно представить как $\bar{o}(f(x)) = \alpha(x)\cdot f(x) = \alpha(x)\cdot(\beta(x)\cdot f(x))$, взяв $\beta(x)\equiv 1$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Поэтому $\bar{o}(f(x)) = \bar{o}(\underline{O}(f(x))$. Аналогично, при тех же $\beta(x)$ и $\alpha(x)$, $\bar{o}(f(x)) = (\beta(x)\cdot\alpha(x))\cdot f(x) = \beta(x)\cdot(\alpha(x)\cdot f(x)) = \underline{O}\cdot(\alpha(x)\cdot f(x)) = \underline{O}(\bar{o}(f(x)))$. Все требуемые равенства доказаны.

5.4. Доказать, что $\varphi(x)\cdot\underline{O}(f(x)) = \underline{O}(\varphi(x)\cdot f(x))$.
Решение. Согласно определению "О-большого", $\underline{O}(f(x)) = \beta(x)\cdot f(x)$, где функция $\beta(x)$ ограничена в некоторой "проколотой" окрестности a. Следовательно, $\varphi(x)\cdot\underline{O}(f(x)) = \varphi(x)\cdot\beta(x)\cdot f(x) = \beta(x)\cdot(\varphi(x)\cdot f(x)) = \underline{O}(\varphi(x)\cdot f(x))$, что и требовалось доказать.

5.5. Доказать, что $\underline{O}(\varphi(x))\cdot\bar{o}(\varphi(x) = \bar{o}(\varphi^2(x))$.
Решение. Согласно определению "о-малого" и "О-большого", $\underline{O}(\varphi(x))\cdot\bar{o}(\varphi(x)) = \beta(x)\cdot\varphi(x)\cdot\alpha(x)\cdot\varphi(x) = \beta(x)\cdot\alpha(x)\cdot\varphi^2(x) = \bar{o}(\varphi^2(x))$, поскольку $\beta(x)\cdot\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$ (так как $\beta(x)$ ограничена в "проколотой" окрестности точки a, а $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to a$), что и требовалось доказать.

5.6. Доказать, что функция $x^3 = \bar{o}(x)$, $x\to 0$.
Решение. В самом деле, $x^3 = x^2\cdot x$, где функция x^2 является бесконечно малой при $x\to 0$. Следовательно, $x^3 = \bar{o}(x)$, $x\to 0$.

5.7. Доказать, что функции $\alpha(x) = 2x$ и $\beta(x) = \sqrt[3]{x^3+x^4}$ имеют одинаковый порядок малости при $x\to 0$.
Решение. Достаточно заметить, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt[3]{x^3+x^4}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\sqrt[3]{1+x}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 2\neq 0,$$

поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{1+x} = 1$.

5.8. Доказать, что функция $A(x) = 1/x^2$ имеет в точке 0 справа более высокий порядок роста, чем функция $B(x) = 1/x$.
Решение. Утверждение следует из того, что функция $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{x}\to+\infty$ при $x\to+0$, то есть является бесконечно большой в точке a справа.

5.9. Рассмотрим функции $f(x) = 2x^2+2x+1$ и $g(x) = x^2$. Доказать, что $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x\to+\infty$.
Решение. Так как $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2+\dfrac{2x+1}{x^2} = \gamma(x)$, и при $x>3$ справедлива оценка $1\le\gamma(x)\le 2$, то $\gamma(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки $+\infty$. Следовательно, $f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x\to+\infty$, что и требовалось доказать. Более того, $f(x) = \underline{O}^*(g(x))$ при $x\to+\infty$, так как существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2\neq 0$.

Задачи для самостоятельной работы.

5.10. Доказать, что если $\varphi(x)\sim\psi(x)$ при $x\to a$, то верны равенства: $\varphi(x)-\psi(x) = \bar{o}(\varphi(x)) = \bar{o}(\psi(x))$.

5.11. Доказать, что при $x\to+\infty$ и $0<m<n$ верно равенство: $\underline{O}(x^n)+\underline{O}(x^m) = \underline{O}(x^n)$.

5.12. Доказать, что при $x\to 0$ и $0<m<n$ верно равенство:
$\bar{o}(x^n)+\bar{o}(x^m) = \bar{o}(x^m)$.

5.13. Доказать, что при $x\to+\infty$ $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \underline{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5.14. Доказать, что при $x\to 0$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ верно равенство:
$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\bar{o}(x)$.

5.15. Доказать, что $x^2\sim\sqrt{x^4+x^5}$, $x\to 0$.

5.16. Доказать, что функции $A(x) = 1/x$ и $B(x) = 3-1/x$ имеют в точке 0 слева одинаковый порядок роста.

§6. Выделение главного члена (главной части) определенного вида у заданной функции.

Рассмотрим несколько примеров решения следующей задачи: *выделить главную часть (главный член) функции $f(x)$ вида $C\cdot(g(x))^\alpha$, при $x\to a$* (см. Определение

2.10 главы 1). Другими словами, требуется, при заданных функциях $f(x), g(x)$ и точке a (конечной или нет), найти (если это возможно) такой коэффициент C и такой показатель α, что функции $f(x)$ и $C\cdot(g(x))^\alpha$ эквивалентны при $x\to a$, то есть функция $f(x)$ представима в виде: $f(x)=C\cdot(g(x))^\alpha+\bar{o}((g(x))^\alpha)$ при $x\to a$.

6.1. Найти главный член функции $f(x)$ вида Cx^α при $x\to+\infty$, если $f(x)=x^2\operatorname{arcctg} x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{arcctg} x}{C\cdot x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{C\cdot x^\alpha}=$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{так как } \frac{1}{x}\to 0\\ \text{воспользуемся}\\ \text{эквивалентностью}\\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}\end{array}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{C\cdot x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{C\cdot x^\alpha}.$$

Легко видеть, что равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{C\cdot x^\alpha}=1$ возможно только при $C=1$ и $\alpha=1$. Следовательно, искомый главный член равен x, и имеет место представление:

$x^2\operatorname{arcctg} x=x+\bar{o}(x)$ при $x\to+\infty$.

6.2. Найти главный член функции $f(x)$ вида Cx^α при $x\to+\infty$, если $f(x)=x^2\operatorname{arcctg}(-x)$.

Решение. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\operatorname{arcctg}(-x)}{C\cdot x^\alpha}=\left(\begin{array}{l}\text{воспользуемся}\\ \text{тем, что}\\ \operatorname{arcctg}(-x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\pi\end{array}\right)=$$

$\pi\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{C\cdot x^\alpha}$. Легко видеть, что равенство $\pi\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{C\cdot x^\alpha}=1$ возможно только при $C=\pi$ и $\alpha=2$. Таким образом, искомый главный член равен $2x^2$, и имеет место представление: $x^2\operatorname{arcctg}(-x)=\pi\cdot x^2+\bar{o}(x^2)$ при $x\to+\infty$.

6.3. Найти главный член функции $f(x)$ вида Cx^α при $x\to 0$, если $f(x)=\ln(\cos\pi x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos\pi x)}{Cx^\alpha}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2\sin^2(\frac{\pi x}{2}))}{Cx^\alpha}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2(\frac{\pi x}{2})}{Cx^\alpha}=\dfrac{-\pi^2}{2C}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^\alpha}$. (В этих преобразованиях мы воспользовались равенством $\cos\pi x=1-2\sin^2(\frac{\pi x}{2})$, а также эквивалентностями: $\ln(1+\alpha)\sim\alpha, \sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.) Далее, ясно, что равенство $\dfrac{-\pi^2}{2C}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^\alpha}=1$ возможно только при $C=\dfrac{-\pi^2}{2}$ и $\alpha=2$. Отсюда следует, что искомый главный член равен $\dfrac{-\pi^2x^2}{2}$, и имеет место представление: $\ln(\cos\pi x)=\dfrac{-\pi^2x^2}{2}+\bar{o}(x^2)$.

6.4. Найти главный член функции $f(x)$ вида $C(1-x)^\alpha$ при $x\to 1$, если $f(x)=x^x-1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{C(1-x)^\alpha}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{C(1-x)^\alpha}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{C(1-x)^\alpha}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln(1+(x-1))}{C(1-x)^\alpha}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-(1-x))}{C(1-x)^\alpha}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{C(1-x)^\alpha}$.

В этих преобразованиях мы воспользовались равенством: $x^x=e^{x\ln x}$, эквивалентностями $e^\alpha-1\sim\alpha, \ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$, а также условием: $x\to 1$. Легко видеть, что равенство $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(1-x)}{C(1-x)^\alpha}=1$ возможно только при $C=-1, \alpha=1$. Поэтому искомый главный член равен, очевидно, $-(1-x)$, и имеет место представление: $x^x-1=-(1-x)+\bar{o}(1-x)$.

6.5. Найти главный член функции $f(x)$ вида $C(\frac{1}{x})^\alpha$ при $x\to\infty$, если $f(x)=\sqrt[4]{x^4+ax+b}-x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+ax+b}-x}{C(\frac{1}{x})^\alpha}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\sqrt[4]{1+\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^4}}-1\right)}{C(\frac{1}{x})^\alpha}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{4}\left(\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^4}\right)}{C(\frac{1}{x})^\alpha}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4x^2}\left(a+\frac{b}{x}\right)}{C(\frac{1}{x})^\alpha}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}{C(\frac{1}{x})^\alpha}$. В этих выкладках мы воспользовались эквивалентностью $(1+\alpha)^d-1\sim\alpha\cdot d$ при $\alpha\to 0$. В даном случае $\alpha=\dfrac{a}{x^3}+\dfrac{b}{x^4}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$. Далее, ясно, что равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}{C(\frac{1}{x})^\alpha}=1$ возможно только при $C = \frac{a}{4}, \alpha = 2$. Поэтому искомый главный член равен $\frac{a}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2$, и следовательно, имеет место представление: $\sqrt[4]{x^4+ax+b}-x = \frac{a}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \bar{o}(\left(\frac{1}{x}\right)^2)$.

Задачи для самостоятельной работы.

Найти для функции $f(x)$ главный член вида $C \cdot (g(x))^\alpha$ при $x \to a$. В ответе указать соответствующее представление: $f(x) = C \cdot (g(x))^\alpha + \bar{o}((g(x))^\alpha)$.

6.6. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, a = 0, g(x) = x$.

6.7. $f(x) = \ln(x^2+4^x), a = 0, g(x) = x$.

6.8. $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^b - x^d}}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}, a = 1, g(x) = 1 - x$.

6.9. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}}, a = 1, g(x) = 1 - x$.

6.10. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, a = +\infty, g(x) = x$.

6.11. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+8x}}, a = +\infty, g(x) = x$.

Ответы:

6.6. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}} + \bar{o}(x^{\frac{1}{8}})$, то есть $C = 1, \alpha = \frac{1}{8}$;

6.7. $\ln(x^2+4^x) = x^2 + \bar{o}(x^2)$, то есть $C = 1, \alpha = 2$.

6.8. $\dfrac{\sqrt[5]{x^b - x^d}}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}} = 2(b-d)^{\frac{1}{5}}(1-x)^{-\frac{4}{5}} + \bar{o}((1-x)^{-\frac{4}{5}})$,

то есть $C = 2(b-d)^{\frac{1}{5}}, \alpha = -\frac{4}{5}$.

6.9. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}} = \dfrac{2\sqrt[3]{7}}{\pi}(1-x)^{-\frac{4}{3}} + \bar{o}((1-x)^{-\frac{4}{3}})$,

то есть $C = \frac{2\sqrt[3]{7}}{\pi}, \alpha = -\frac{4}{3}$.

6.10. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + \bar{o}(\sqrt{x})$,

то есть $C = 1, \alpha = \frac{1}{2}$.

6.11. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+8x}} = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \bar{o}(x^{-\frac{1}{3}})$, то есть $C = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{3}$.

§7. Отыскание и классификация точек разрыва графика функции.

Рассмотрим несколько примеров отыскания и характеристики точек разрыва графика заданной функции $f(x)$.

7.1. $f(x) = \dfrac{2x}{(2+x)^2}$.

Решение. Данная функция относится к классу элементарнызх функций, поэтому она непрерывна во всей области определения. Ее область определения $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\}$. Исследуем точку $x = -2$, являющуюся предельной для области определения функции. Найдем односторонние пределы $f(-2+0)$ и $f(-2-0)$: $f(-2\pm 0) = \lim\limits_{x \to -2\pm 0} \dfrac{2x}{(2+x)^2} = -\infty$. Следовательно, согласно принятой классификации точек разрыва, $x = -2$ является точкой бесконечного разрыва II рода.

Ответ: $x = -2$ - точка бесконечного разрыва II рода.

7.2. $f(x) = \dfrac{x}{\sin 2x}$.

Решение. Область определения данной элементарной функции $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. Исследуем точки $x_k = \frac{\pi k}{2}$, подозрительные на разрыв. Найдем пределы при $k \neq 0$:

$$f(x_k+0) = \lim_{x \to \frac{\pi k}{2}+0} \frac{x}{\sin 2x} = \left(t = x - \frac{\pi k}{2}\right) = \lim_{t \to +0} \frac{t + \frac{\pi k}{2}}{\sin(\pi k + 2t)}$$

$$= \frac{\pi k}{2} \lim_{t \to +0} \frac{(-1)^k}{\sin(2t)} = \begin{cases} +\infty, k = 2m; \\ -\infty, k = 2m+1 \end{cases};$$

$$f(x_k-0) = \lim_{x \to \frac{\pi k}{2}-0} \frac{x}{\sin 2x} = \left(t = x - \frac{\pi k}{2}\right) = \lim_{t \to -0} \frac{t + \frac{\pi k}{2}}{\sin(\pi k + 2t)}$$

$$= \frac{\pi k}{2} \lim_{t \to -0} \frac{(-1)^{k+1}}{\sin(2t)} = \begin{cases} -\infty, k = 2m; \\ +\infty, k = 2m+1 \end{cases}.$$

Если $k = 0$, то $f(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: В точках $x_k = \frac{\pi k}{2}, k \neq 0$, - бесконечные разрывы II рода; в точке $x_0 = 0$ - устранимый р зрыв.

7.3. $f(x) = \dfrac{2}{\ln 2x}$.

Решение. Область определения данной элементарной функции $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 0, x \neq \frac{1}{2}\}$. Исследуем точку $x = \frac{1}{2}$, являющуюся предельной для области определения функции и справа, и слева. Найдем пределы: $f(\frac{1}{2} \pm 0)$.

$$f(\tfrac{1}{2} \pm 0) = \lim_{x \to \frac{1}{2} \pm 0} \frac{2}{\ln 2x} = \lim_{x \to \frac{1}{2} \pm 0} \frac{2}{\ln(1 + 2(x - \frac{1}{2}))}$$

$= \lim\limits_{x \to \frac{1}{2} \pm 0} \dfrac{2}{2(x - \frac{1}{2})} = \pm\infty$. Это означает, что в точке $x_1 = \frac{1}{2}$ график функции имеет бесконечный разрыв II рода.

Ответ: В точке $x_1 = \frac{1}{2}$ - бесконечный разрыв II рода.

7.4. $f(x) = \dfrac{3x}{1 - e^{\frac{2x}{2-x}}}$.

Решение. Область определения данной элементарной функции $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2, x \neq 0\}$. Исследуем точки $x_1 = 2, x_2 = 0$, являющиеся предельными для D_f. Найдем пределы: $f(2 \pm 0), f(\pm 0)$. $f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{3x}{1 - e^{\frac{2x}{2-x}}} =$

$= \left(\begin{array}{l} \text{так как } \frac{2x}{2-x} \to -\infty, \\ \text{то } e^{\frac{2x}{2-x}} \to 0 \end{array} \right) = 6, f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{3x}{1 - e^{\frac{2x}{2-x}}} =$

$\left(\begin{array}{l} \text{так как } \frac{2x}{2-x} \to +\infty, \\ \text{то } e^{\frac{2x}{2-x}} \to +\infty \end{array} \right) = 0$. Таким образом, $f(2-0) = 0 \neq 6 = f(2+0)$. Поэтому в точке $x_1 = 2$ график функции имеет разрыв I рода (неустранимый). Далее, $f(\pm 0) =$

$\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{3x}{1 - e^{\frac{2x}{2-x}}} = \lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{3x}{-\frac{2x}{2-x}} = -\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{3(2-x)}{2} = -3$. Это означает, что в точке $x_2 = 0$ график функции имеет устранимый разрыв.

Ответ: В точке $x_1 = 2$ разрыв I рода (неустранимый); в точке $x_2 = 0$ устранимый разрыв.

7.5. $g(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{3}, |x| \leq \frac{3}{2}; \\ |x| - \frac{3}{2}, |x| > \frac{3}{2}. \end{cases}$

Решение. Область определения данной элементарной функции $D_f = \mathbb{R}$. При этом на отрезке $[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ и вне него функция задана различными формулами, представляющими элементарные функции. Следовательно всюду, кроме, может

быть, точек $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$, функция заведомо непрерывна. Исследуем точки $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$. Найдем пределы: $f(-\frac{3}{2} \pm 0), f(\frac{3}{2} \pm 0)$. Поскольку функция четная, то $f(-\frac{3}{2} \pm 0) = f(\frac{3}{2} \mp 0)$. Следовательно, достаточно вычислить, например, $f(\frac{3}{2} \mp 0)$. $f(\frac{3}{2} + 0) = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}+0} \cos\dfrac{\pi x}{3} = 0$, $f(\frac{3}{2} - 0) =$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}-0} |x| - \dfrac{3}{2} = 0$. Получили, что $f(\frac{3}{2} \mp 0) = 0 = g(\frac{3}{2})$. Это означает, что функция непрерывна в точке $x_2 = \frac{3}{2}$. В силу четности, $g(x)$ непрерывна и в точке $x_1 = -\frac{3}{2}$.

Ответ: Данная функция непрерывна на всей числовой оси.

Задачи для самостоятельной работы.

Найти и охарактеризовать точки разрыва функции $f(x)$ (если они имеются):

7.6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\pi x}{|16 - x^2|}}$;

7.7. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right)$;

7.8. $f(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

7.9. $f(x) = (-1)^{[x]}$, где $[x]$ - целая часть x.

7.10. $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{|(x+2)(x-5)|}$.

Ответы:

7.6. В точках $x_1 = -4, x_2 = 4$ устранимые разрывы. $f(-4 \pm 0) = \lim\limits_{x \to -4 \pm 0} f(x) = 0, f(4 \pm 0) = \lim\limits_{x \to 4 \pm 0} f(x) = 0$.

7.7. В точках $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ разрывы I рода (неустранимые). $f(1 \pm 0) = f(2 \pm 0) = f(3 \pm 0) = \pm\frac{\pi}{2}$.

7.8. Точек разрыва нет. Функция непрерывна.

7.9 Точки $x_n = n, n \in \mathbb{Z}$, являются точками разрыва I рода (неустранимыми). $f(n \pm 0) = \begin{cases} \pm 1, & n \text{ четно }; \\ \mp 1, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$

7.10 Точки $x_1 = -2, x_2 = 5$ являются точками бесконечных разрывов (II рода).

§8. Равномерная непрерывность функции.

8.1. Доказать равномерную непрерывность функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на $(-\infty; +\infty)$, пользуясь ее определением, то есть найти для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее ему $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Решение. Так как $f(x) = \sqrt[3]{x}$ является элементарной функцией, то она непрерывна на всей числовой оси, являющейся ее областью определения. В частности, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на сегменте $[-2; 2]$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной непрерывности на $[-2; 2]$, существует такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x_1, x_2 \in [-2; 2]$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_1$, верно, что $\Delta f = |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Далее, при $|x| \geq 1$ и достаточно малом $|\Delta x|$, так что $1 + \frac{\Delta x}{x} > 0$, имеем: $|\Delta f| = |f(x + \Delta x) - f(x)| = |\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}| =$

$$= \frac{|\Delta x|}{|(x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} + [(x + \Delta x)x]^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}|} = \left(\begin{array}{l} \text{вынесем в} \\ \text{знаменателе} \\ x^{\frac{2}{3}} \text{ за скобку.} \end{array} \right) =$$

$$\frac{|\Delta x|}{x^{\frac{2}{3}}|(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{3}} + 1|} < |\Delta x| < \varepsilon.$$

Отсюда видно, что из неравенства $|\Delta x| < \delta_2$ будет следовать неравенство $|\Delta f| = |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon$ при любом δ_2, $0 < \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Окончательно, положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Тогда для любых точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta$, будет выполнено неравенство $\Delta f = |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, так как в этих условиях или обе точки находятся на отрезке $[-2; 2]$, или обе они одновременно лежат либо в $[1; +\infty)$, либо в $(-\infty; -1]$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ указано $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее определению равномерной непрерывности.

8.2. Исследовать функцию $f(x) = x \cos x$ на равномерную непрерывность на интервале $[0; +\infty)$.

Решение. Покажем, что данная функция не является равномерно непрерывной на указанном интервале. То есть покажем, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно указать такие точки $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$, что $|x_1 - x_2| < \delta$, но $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$. С этой целью рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{y_n\}_{n=1,2,\ldots}$, где $x_n = \pi n + \frac{\pi}{2}$, $y_n = \pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$. Ясно, что $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$, $|\Delta f_n| = |f(x_n) - f(y_n)| = |0 - (\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) \cos(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})| = (\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot (\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \pi$. Поэтому, например, для $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ можно указать такой номер $N = N(\frac{\pi}{2})$, что для любого $n, n > N$, будет $||\Delta f_n| - \pi| < \frac{\pi}{2}$, то есть $\frac{\pi}{2} < |\Delta f_n| < \frac{3\pi}{2}$. Таким образом, взяв $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, для любого $\delta > 0$ любая пара точек x_n, y_n с номером $n > \max\{\frac{1}{\delta}, N(\frac{\pi}{2})\}$ удовлетворяет условиям: $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \delta$, $|\Delta f_n| = |f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\pi}{2}$. Это означает, что данная функция не является равномерно непрерывной на указанном интервале.

8.3. Исследовать функцию $f(x) = \cos(x^2)$ на равномерную непрерывность на интервале $[0; +\infty)$.

Решение. Покажем, что данная функция не является равномерно непрерывной на указанном интервале. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{x'_n\}_{n=1,2,\ldots}$, где $x_n = \sqrt{2\pi n}$, $x'_n = \sqrt{2\pi n + \pi}$. Легко видеть, что $|\Delta_n| = |x_n - x'_n| = |\sqrt{2\pi n} - \sqrt{2\pi n + \pi}| = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \pi}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Поэтому для любого $\delta > 0$ при достаточно большом n будет $|\Delta_n| < \delta$. Однако для любых $n \in \mathbb{N}$ имеем: $|\Delta f_n| = |f(x_n) - f(x'_n)| = |\cos(x_n)^2 - \cos(x'_n)^2| = |1 - (-1)| = 2$. Таким образом, взяв $\varepsilon = 2$, получаем, что для любого $\delta > 0$ имеются пары точек (x_n, x'_n) с условием: $|\Delta_n| = |x_n - x'_n| < \delta$, но одновременно $|\Delta f_n| = |f(x_n) - f(x'_n)| = \varepsilon = 2$. Это означает, что что данная функция не является равномерно непрерывной на указанном интервале.

8.4. Исследовать функцию $f(x) = x^2 - 3x + 8$ на равномерную непрерывность на интервале $[0; 5]$. Указать для любого $\varepsilon > 0$ соответствующее $\delta(\varepsilon) > 0$.

Решение. Данная функция является элементарной, и потому непрерывна на всей числовой оси, являющейся ее областью определения. Следовательно, в силу теоремы Кантора, она равномерно непрерывна на $[0;5]$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем соответствующее $\delta = \delta(\varepsilon)$. Рассмотрим неравенство $|f(x) - f(y)| = |(x^2 - 3x + 8) - (y^2 - 3y + 8)| = |(x^2 - y^2) - 3(x - y)| \le |x^2 - y^2| + 3|x - y| = |x - y|(|x + y| + 3) < |x - y|(|x| + |y| + 3) \le 13|x - y| < \varepsilon$. Отсюда следует, что достаточно взять $|x - y| < \frac{\varepsilon}{13}$, чтобы обеспечить справедливость неравенства $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Поэтому произвольному заданному $\varepsilon > 0$ соответствует любое $\delta = \delta(\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству: $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{13}$.

8.5. Исследовать функцию $f(x) = \ln x$ на равномерную непрерывность на интервале $(0; 1)$.

Решение. Данная функция является элементарной, и потому непрерывна на всей области определения $D_f = (0; +\infty)$. Покажем, что она не является равномерно непрерывной на $(0; 1)$. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{x'_n\}_{n=1,2,\ldots}$, где $x_n = e^{-n}$, $x'_n = e^{-(n+1)}$. Легко видеть, что $|\Delta_n| = |x_n - x'_n| = |e^{-n} - e^{-(n+1)}| < e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Поэтому для любого $\delta > 0$ при достаточно большом n будет $|\Delta_n| = |x_n - x'_n| < \delta$. Однако при этом $|\Delta f_n| = |f(x_n) - f(x'_n)| = |\ln x_n - \ln x'_n| = |\ln \frac{x_n}{x'_n}| = |\ln \frac{e^{-n}}{e^{-(n+1)}}| = \ln e = 1$. Таким образом, взяв, например, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получаем, что для любого $\delta > 0$ имеются пары точек (x_n, x'_n) с условием: $|\Delta_n| = |x_n - x'_n| < \delta$, но одновременно $|\Delta f_n| = |f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Это означает, что что данная функция не является равномерно непрерывной на указанном интервале.

Задачи для самостоятельной работы.

Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x)$ на указанном промежутке:

8.6. $f(x) = \operatorname{arctg} x, -\infty < x < +\infty$.

8.7. $f(x) = 2^x \cos \frac{1}{x}, 0 < x < 1$.

8.8. $f(x) = x + \cos x, -\infty < x < +\infty$.

8.9 $f(x) = \cos x + \sin x, -\infty < x < +\infty$.

8.10 $f(x) = (1 + \sin x)^{2\operatorname{ctg} x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ответы:

8.6. Функция равномерно непрерывна. Любому $\varepsilon > 0$ соответствует, например, всякое $\delta = \delta(\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству: $0 < \delta(\varepsilon) \le \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{\varepsilon(\pi^2 - 4)}{4}\}$;

8.7. Функция не является равномерно непрерывной.

8.8. Функция равномерно непрерывна. Любому $\varepsilon > 0$ соответствует, например, всякое $\delta = \delta(\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству: $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{3}$.

8.9. Функция равномерно непрерывна. Любому $\varepsilon > 0$ соответствует, например, всякое $\delta = \delta(\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству: $0 < \delta(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

8.10 Функция равномерно непрерывна.